



# The Transmuted Marshall-Olkin Power Distribution: Estimations and Applications

Ruqaiya Abdullah Ahmed Al-Eryani<sup>1,\*</sup>, Ahmed Ali Omar Hurairah <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics and Information, Faculty of Commerce and Economics - Sana'a University, Sana'a, Yemen.

\*Corresponding author: [alhubaishghamdan@gmail.com](mailto:alhubaishghamdan@gmail.com)

## Keywords

1. Power distribution
2. Rank Transmutation Map
3. Marshall-Olkin distribution
4. Transmuted Marshall-Olkin Power distribution
5. Maximum likelihood estimation
6. Information Criterion

## Abstract:

In this study, we introduce and develop a new flexible distribution called the Transmuted Marshall-Olkin Power distribution the work not only presents the new distribution but also comprehensively derives its mathematical and structural properties, including moments, the moment generating function, the characteristic function, quantile function and order statistics.

The problem of estimating the distribution parameters was addressed by comparing the performance of two different estimation methods: the maximum likelihood method and the least square method. For an objective comparison between these methods, we relied on an extensive simulation study using the criteria of Bias and Mean Square Error as key measures of accuracy and efficiency.

The simulation results demonstrated conclusively that the least square method performed best and was the most efficient for estimating the parameters of the proposed distribution compared to the other.

The efficiency, importance and flexibility of the Transmuted Marshall-Olkin Power distribution were demonstrated through applications to real dataset. Several goodness-of-fit statistics were employed, including the Akaike Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC), Corrected Akaike Information Criterion (AICC) and Consistent Akaike Information Criterion (CAIC), In addition to the log-likelihood function evaluated at the maximum likelihood estimates (-2l). the comparative analysis revealed that the proposed TMOP distribution consistently achieved lower information criteria value than the competing models, confirming its superior fitting capability, robustness and flexibility. Therefore, the TMOP distribution can be considered a promising alternative for modeling a wide variety of real-world data.

## توزيع مارشال اولكين القوة المحول: التقديرات والتطبيقات

رقية عبد الله أحمد الارياني<sup>1\*</sup> , أحمد علي عمر هريرة<sup>1</sup>

اقسم الاحصاء والمعلومات ، كلية التجارة والاقتصاد - جامعة صنعاء ، صنعاء ، اليمن.

\*المؤلف: [alhubaishighamdan@gmail.com](mailto:alhubaishighamdan@gmail.com)

### الكلمات المفتاحية

1. توزيع القوة (P)
2. خريطة تحويل الرتبة (RTM)
3. توزيع مارشال اولكين (MO)
4. توزيع مارشال اولكين القوة المحول (TMOP)
5. طريقة الإمكان الأعظم (MLE)
6. معايير جودة المطابقة (IC)

### الملخص:

في هذه الدراسة، نقدم ونطور توزيعاً مرناً جديداً يسمى توزيع مارشال اولكين القوة المحول، لا يقدم العمل التوزيع فحسب بل يستمد أيضاً جمع خصائصه الرياضية والاحصائية بما في ذلك العزوم، والدالة المولدة للعزوم، والدالة الكمية وإحصاءات الترتيب. تمت معالجة مشكلة تقدير معالم التوزيع من خلال مقارنة أداء طرق تقدير مختلفة: طريقة الإمكان الأعظم، طريقة المربعات الصغرى وإجراء مقارنة موضوعية بين هذه الطرق اعتمدنا على دراسة محاكاة مكثفة عند احجام عينة مختلفة باستخدام معياري التحيز ومتوسط مربعات الأخطاء كمقياسين رئيسيين للدقة والكفاءة. أظهرت نتائج المحاكاة بشكل قاطع أن طريقة المربعات الصغرى كانت الأفضل أداءً والأكثر كفاءة لتقدير معالم التوزيع الجديد مقارنة بالطريقة الأخرى.

تم إثبات كفاءة وأهمية ومرونة توزيع مارشال اولكين القوة المحول من خلال تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية، تم استخدام العديد من إحصاءات جودة الملاءمة بما في ذلك معيار المعلومات أكايكي (AIC) معيار معلومات بايز (BIC) معيا معلومات أكايكي المصحح (AICC) ومعيار معلومات أكايكي المتسق (CAIC) بالإضافة الى دالة الاحتمال اللوغاريتمية التي تم تقييمها عند أقصى تقديرات الاحتمال (-12) كشف التحليل المقارن أن توزيع TMOP المقترح حقق باستمرار قيمة معايير معلومات أقل من النماذج المنافسة مما يؤكد قدرته الفائقة على الملاءمة والمتانة والمرونة. لذلك يمكن اعتبار توزيع TMOP بديلاً لنمذجة مجموعة واسعة من بيانات العالم الحقيقي

## المقدمة:

تلعب التوزيعات الإحصائية دوراً محورياً في تحليل البيانات واتخاذ القرارات الإحصائية عبر مختلف المجالات العلمية مثل الاقتصاد، الطب، الهندسة والعلوم الاجتماعية. كما تكمن أهمية هذه التوزيعات في قدرتها على تمثيل السلوك العشوائي للظواهر الطبيعية والعملية مما يمكن الباحثين والنماذج الإحصائية من إجراء التنبؤ والتحليل بدقة وفعالية.

مع تزايد تعقيد البيانات في العصر الحديث، برزت حاجة متزايدة لنماذج أكثر مرونة وشمولاً وقد أدى ذلك إلى تطوير ما يعرف بالتوزيعات المعممة، والتي تهدف إلى توسيع النماذج التقليدية من خلال دمج معلمات إضافية أو إدخال خصائص جديدة مما يجعلها أكثر قدرة على معالجة مجموعات البيانات المعقدة والمتنوعة، تشمل العائلات البارزة لمثل هذه التوزيعات العائلة الاسية، عائلة بيتا، عائلة مارشال اولكين والتوزيعات المحولة وغيرها.

وقد ساهم العديد من الباحثين في تطوير هذه التوزيعات المعممة حيث دمج بعضهم خصائص التوزيعات المعروفة لإنتاج نماذج هجينة تقدم مرونة محسنة قدم باحثون مثل (Yousof, 2015) عائلة G الاسية المعممة المحولة، وأقترح (Afify et al, (2.16) عائلة الهندسة المحولة G بينما استكشف آخرون العائلة المعممة المحولة.

تعكس هذه الجهود اتجاهها أوسع في النمذجة الإحصائية نحو بناء توزيعات شديدة المرونة والقدرة على التكيف لتلائم مجموعة واسعة من البيانات.

كما استخدم العديد من المؤلفين العائلة المحولة المعممة (TG) لإنشاء توزيعات جديدة على سبيل

المثال (Alabid and Hurairah, 2019) اقترحا توزيع القوة المحول بيتا، (Khan et al , 2022) توزيع معدل المخاطر القوة المحول وتطبيقاته، (Elbatal et al , 2014) قدموا توزيع فريشت المعمم المحول: الخصائص والتطبيقات (Afify et al , 2015a) اقترحوا توزيع لوماكس واييل المحول، (Elbatal and Aryal, 2013) اقترحوا توزيع واييل الإضافي المحول مع تطبيقاته في الموثوقية.

أقترح (Marshall- Olkin , 1997) طريقة مهمة لإضافة معلمة جديد الى توزيع موجود مسبقاً بحيث ينتج لنا توزيعاً جديداً يسمى توزيع مارشال اولكين الموسع يشمل هذا التوزيع التوزيعات الاصلية كحالة خاصة مما يمنح المرونة الأكبر للنموذج، هناك العديد من الباحثين درسوا هذا التعميم منهم (Jose (2011) درس عائلة من توزيعات مارشال اولكين واعتبر تطبيقاتها في نظرية الموثوقية، (Mansoor et al, (2018) قدموا توزيع

اللوجستي الاسي مارشال اولكين وهناك آخرون مثل (Basheer (2019) Okasha et al. (2020) وآخرون في هذه الدراسة تقدم امتداداً لتوزيع القوة بناءً على طريقة مارشال اولكين المحول (TMO) ندرس الخصائص الرياضية لهذا التوزيع منها العزوم ، الدالة المولدة للعزوم ، الدالة الكمية ، الإحصاءات المرتبة وكذلك تحليل الموثوقية، درسنا طريقتان لتقدير المعالم وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى واستخدم المحاكاة لإجراء مقارنة بين هذه الطرق وتحديد أي الطريقة الأكثر كفاءة وفقاً للتحيز ومتوسط مربع الخطأ. وأخيراً تم تطبيق التوزيع الجديد على مجموعتي بيانات حقيقية وتم مقارنة هذا التوزيع مع التوزيعات

الفرعية له من خلال معايير المعلومات وظهرت النتائج كفاءة توزيع TMOP على التوزيعات الأخرى.

### مشكلة الدراسة

سعى الباحثون في مجال الإحصاء باستمرار إلى تطوير وتعميم التوزيعات الاحتمالية من أجل الحصول على نتائج أكثر دقة وموثوقية في نمذجة البيانات وتحليلها ومع تزايد بيانات العالم الواقعي، غالباً ما تقتصر التوزيعات التقليدية في النقاط التباين المتأصل وهيكل هذه البيانات بشكل كافٍ، وقد خلق ذلك تحديات في تمثيل مجموعة البيانات هذه وتحليلها بدقة ونتيجة لذلك، كان هناك اهتمام متزايد في بناء توزيعات أكثر مرونة من خلال إدخال معلمات إضافية أو تطبيق تقنيات التحويل على النماذج التقليدية. في هذه الدراسة نتناول المشكلة من خلال اقتراح توزيع جديد يعتمد على خارطة تحويل الرتب الترتيبية، والهدف هو تطوير نموذج أكثر مرونة يمكن أن يوفر قدرات ملاءمة محسنة وقدر أكبر على التكيف عند التعامل مع مجموعات البيانات الواقعية المعقدة.

### الأسئلة البحثية الفرعية:

- كيف يمكن استخدام تعميم مارشال اولكين (MO) وكذلك خارطة التحويل الترتيبية (RTM) مع توزيع القوة (P) للحصول على توزيع يتمتع بمرونة أكبر مع نمذجة البيانات المتطرفة؟

- ماهي الخصائص الرياضية والاحصائية للتوزيع الجديد؟

- ماهي أفضل الطرق لتقدير معلمات التوزيع الجديد (TMOP)؟

- هل توفر المعلمات المضافة تحسناً معنوياً احصائياً في التوزيع الجديد عند تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية؟

### فرضيات الدراسة

فرضية البحث الرئيسية: تفترض الدراسة أن التعميم الجديد (TMOP) سيظهر مرونة إحصائية محسنة في نمذجة البيانات المتطرفة غير المتماثلة ويوفر ملاءمة أفضل مقارنة بتوزيع فريشت القياسي والتعميمات الأخرى.

### الفرضيات الفرعية:

1. مقدرات لمعلمات التوزيع المقترح ستتمتع بخصائص الاتساق والكفاءة المقاربة. وهذا يؤدي إلى مقدرات ذات اقل خطأ معياري لذلك فإن النموذج سيمثل البيانات تمثيلاً جيداً.

2. معايير المعلومات ستظهر تفوقاً معنوياً لتوزيع (TMOP) في ملاءمة مجموعات بيانات حقيقية مختارة مقابل التوزيع الاصلي (P) وتوزيع (MOP) وتوزيع (TP).

### أهداف الدراسة

الهدف العام: يهدف هذا البحث إلى تطوير توزيع احتمالي جديد يسمى توزيع مارشال اولكين القوة المحول (TMOP) - Transmuted Marshall-Olkin Power Distribution، يمتلك مرونة أعلى في نمذجة البيانات المتطرفة مقارنة بالتوزيعات

4. اقتصار التطبيقات العملية على مجال تحليل ونمذجة بيانات الموثوقية والقيم المتطرفة.

### التعريفات الاصطلاحية والإجرائية

اشتملت الدراسة على التعريفات الاصطلاحية والاجرائية الآتية:

#### 1. توزيع القوة: Power Distribution (P)

توزيع القوة يعتبر حالة خاصة لتوزيع بيتا، وقد تم اشتقاق توزيع القوة أيضاً من توزيع باريتو باستخدام التحويل العكسي. توزيع القوة عادةً يستخدم لتحليل الموثوقية والعمر والدخل، قارن Meniconi and Barry توزيع القوة بالتوزيعات الاسية واللوغاريتمية الطبيعية ووبيل لقياس موثوقية المكونات الكهربائية وخلصوا الى أن توزيع القوة هو الأفضل. قدم العديد من الباحثين تفاصيل حول هذا التوزيع على سبيل المثال درس (Zheng et al, 2003) توزيع القوة الاسي، (Saracoglu et al, 2021) توزيع القوة الاسي المحول، (Tavangar, 2011) توزيع دالة القوة الذي يتميز بإحصاءات الترتيب المعممة المزدوجة، درس (Rady et al, 2016) توزيع القوة لوماكس مع تطبيقه على بيانات سرطان المثانة.

تعطى دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع (P) (والذي يشار له بواسطة  $P(\theta, \beta)$ ) على النحو الآتي: (من أجل  $0 < x < \beta$ ):

$$G(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta \quad (1)$$

$$g(x) = \theta \beta^{-\theta} x^{\theta-1} \quad (2)$$

الكلاسيكية بالإضافة الى قدرة تحسينية على تمثيل البيانات غير المتماثلة ويعتمد على أربع معلمات تسمح بضبط دقيق لسلوك الذيل.

### الأهداف الفرعية:

1. استخدام عائلة (TG) التي اقترحها (Shaw and Buckley, 2007) وتوزيع (MOP) المقدم بواسطة (Okorie et al, 2017) لبناء التوزيع الجديد مارشال اولكين القوة المحول (TMOP) واشتقاق الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح العزوم والكميات، دوال توليد العزوم والارقام العشوائية وإحصاءات الترتيب. 2. تقدير معلمات التوزيع المقترح بطريقتي (الإمكان الأعظم (MLE)، طريقة المربعات الصغرى) ثم مقارنة هذه الطرق لتحديد أيها يعطي نتائج أكثر دقة باستخدام مقياسي التحيز ومتوسط مربع الخطأ عبر اجراء المحاكاة باستخدام برنامج SAS.

3. تطبيق عملي للتوزيع الجديد على مجموعة بيانات حقيقية ومقارنته بالتوزيعات الفرعية له لتحديد أي التوزيعات يناسب البيانات بشكل أفضل.

### حدود الدراسة

1. تقتصر الدراسة على تحليل توزيع القوة فقط، وبعض تعميماته دون مقارنة شاملة مع جميع تعميماته الموجودة في الادبيات.

2. صعوبة اشتقاق تعبيرات تحليلية مغلقة لبعض الخصائص الاحصائية مما يتطلب استخدام طرق عددية.

3. تعقيد الصيغ الرياضية لـ (TMOP) قد يزيد من صعوبة التحليل ويجعل تقديرات المعلمات أكثر صعوبة تحليلياً مقارنة بالتوزيعات البسيطة وهذا يتطلب استخدام خوارزميات تحسين عددية لتقدير المعلمات.

$$-\infty < x < \infty$$

بتطبيق هذا التعميم على توزيع القوة كما قام به (Okorie et al, 2017) نحصل على توزيع مارشال اولكين القوة، تعطى دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع (MOP) كما يلي

$$F(x) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{\alpha\theta\beta^{-\theta}(x)^{\theta-1}}{\left(\alpha + (1 - \alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} \quad (6)$$

3. خريطة تحويل الرتبة (RTM) Rank Transmutation Map

تقنية لتعميم التوزيعات الاحتمالية، عن طريق إضافة معلمة تحكم  $\lambda$  لتحسين المرونة (Shaw and Buckley, 2009)، وتعطى بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + \lambda)F(x) \\ &- \lambda F^2(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)[(1 + \lambda) \\ &- 2\lambda F(x)] \end{aligned} \quad (8)$$

حيث  $|\lambda| \leq 1$  هي معلمة التحويل.

حيث:  $\beta > 0$  و  $\theta > 0$  هما على التوالي معلمتي المقياس (scale) و الشكل (shape).

2. عائلة مارشال اولكين Marshall-Olkin family

قدم (Marshall and Olkin, 1997) عائلة جديد من التوزيعات عن طريق إضافة معلمة جديدة للتوزيعات التقليدية للحصول على توزيعات أكثر مرونة. استخدم العديد من الباحثين طريقة مارشال اولكين لاقتراح توزيعات جديدة ودراسة خصائصها وتقدير معلماتها على سبيل المثال قدم (Krishna et al, 2013) توزيع مارشال اولكين فريشت، قدم (Ahmed et al, 2017) توزيع مارشال اولكين وبيبل الموسع كما قدم (Nwezza and Ugwuowo, 2021) توزيع مارشال اولكين جامبل وبيبل الموسع ودرسا خصائصه وتطبيقه. تعطى دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع (MO):

$$F(x) = \frac{G(x)}{1 - \alpha^- G(x)^-} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha g(x)}{(1 - \alpha^- G(x)^-)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

حيث

$$\begin{aligned} G(x)^- &= 1 - G(x), \alpha > 0, \\ \alpha^- &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

المقدرة وهي: معيار معلومات (AIC)، معيار معلومات ((Akaike Corrected (CAIC)، معيار معلومات ((Bayesian (BIC)، معيار معلومات ((Hannan-Quinn (HQIC) والتي تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= 2k - 2l(\hat{\theta}) \\ \text{CAIC} &= \text{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \\ \text{BIC} &= \log(n) - 2l(\hat{\theta}) \\ \text{HQIC} &= 2k \log(\log(n)) - 2l(\hat{\theta}) \end{aligned}$$

حيث  $l(\hat{\theta})$  يشير القيمة العظمى لدالة الامكان اللوغاريتمية و  $K$  هو عدد المعلمات المقدره،  $n$  حجم العينة و  $\theta$  هي المعلمات. ووفقاً لهذه المعايير يتم اختيار النموذج الذي له أدنى قيمة لهذه المعيار كأفضل نموذج.

#### منهجية الدراسة وإجراءاتها

اعتمدت هذه الدراسة على منهجية متكاملة ثلاثية الابعاد تجمع بين:

1. التحليل النظري: لاشتقاق الخصائص الرياضية.

2. التحليل التطبيقي: للمحاكاة والتطبيقات.

3. التحليل المقارن: لتقييم الأداء مقابل التوزيعات التنافسية، وهذا التصميم الثلاثي هو الأمثل لدراسة التوزيعات الاحتمالية الجديدة وفقاً لـ (Nadarajah and Kotz, 2003)

#### المراحل الاجرائية للمنهجية:

المرحلة الاولى: البناء النظري للتوزيع الجديد

1. مراجعة الادبيات حول توزيع القوة وتعميماته وتعميم مارشال اولكين وخارطة التحويل للترتيب التربيعية.

وبتطبيق (T-G) على توزيع (MOP) نحصل على توزيع مارشال اولكين القوة المحول.

#### 4. طريقة الامكان الاعظم (MLE):

في عام 1920، اقترح العالم فيشر هذه الطريقة وتعد وادة من أهم طرق التقدير شيوعاً في الاستخدام بسبب مزاياها وخصائصها، وأهمها الدقة، الكفاءة والاتساق خاصة عندما يزيد حجم العينة (Bain, 1978, Casella and Berger, 2002). تعمل هذه الطريقة على تكرار عملية الحساب حتى نحصل على أفضل تقدير للمعلمت، يكمن مبدأ هذه الطريقة في إيجاد أعلى قدرات احتمالية ممكنة تصل بالدالة الى أقصى حد لها.

#### 5. طريقة المربعات الصغرى (LS)

تعد طريقة المربعات الصغرى واحدة من أهم التقنيات الإحصائية والرياضية المستخدمة في تحليل البيانات، تهدف الى إيجاد أفضل خط أو منحنى ملائم لمجموعة من نقاط البيانات وذلك بتقليل مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الفعلية والتقديرات المتوقعة انظر Gupta and Kundu (2000) and Elbatal and Merovci (2014)

6. المحاكاة: طريقة رياضية تتسم بالمرونة والقدرة على التجربة والاختبار عدت مرات وذلك لتقليل الوقت والتكلفة حيث يتم توليد بيانات تجريبية قريبة من البيانات الحقيقية واستخدامها لتحليل نموذج جديد وحل المشكلات المعقدة لهذه البيانات من خلال العمليات المنطقية والرياضية اللازمة لوصف واقع البيانات في فترة زمنية محددة.

7. معايير جودة الملاءمة (IC): معايير إحصائية لمقارنة النماذج تجمع بين دقة الملاءمة وعدد المعالم

في التطبيقات لنمذجة البيانات المعقدة والتي تستخدم في العادة مع التوزيعات الاخرى.

#### 4. التحليل الاحصائي:

استخدام برمجيات احصائية متخصصة مثل برنامج SAS لتنفيذ جميع التحليلات النظرية والتطبيقية.

#### هيكل البحث

الفصل الثاني: توزيع مارشال اولكين القوة المحول Transmuted Marshall-Olkin Power Distribution

هنا، نقوم باشتقاق CDF و PDF لتوزيع TMOP ذو أربع معلمات وهي  $(\theta, \beta, \lambda, \alpha)$  والذي يشار اليه اختصاراً بـ  $TMOP(\theta, \beta, \lambda, \alpha)$  ، واشتقاق الدوال ذات الصلة كدالة البقاء ودالة معدل الخطر، واشتقاق الخصائص الرياضية.

#### 1. اشتقاق CDF و PDF لتوزيع TMOP

بتطبيق خارطة الرتب التريعية على توزيع مارشال اولكين القوة (Okorie,2017) وبالتعويض عن  $G(x)$  في المعادلة (5) بواسطة  $G_{mop}(x)$ ، نحصل على (CDF) كما يلي:

$$G(x) = \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right]^{1 + \lambda} - \lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \quad (9)$$

وكذلك نحصل على PDF للتوزيع الجديد بالعلاقة:

2. اشتقاق التوزيع الجديد، واشتقاق الخصائص ويشمل تطبيق تعميم مارشال اولكين على توزيع القوة ثم تطبيق خارطة التحويل للرتب التريعية على الناتج من أجل اشتقاق دالة التوزيع التراكمية وكثافة احتمال التعميم الجديد واشتقاق دالة البقاء ودالة معدل الخطر واشتقاق الخصائص الرياضية والاحصائية للتوزيع الجديد كالعزوم والدالة المولدة للعزوم واحصاءات الترتيب ودالة الكميات.

#### المرحلة الثانية: التقدير الاحصائي والمحاكاة

1. استخدام طريقتي لتقدير معلمات التوزيع الجديد  
2. استخدام المحاكاة لتوليد بيانات عشوائية من التوزيع وتطبيق طريقتي التقدير على البيانات المتولدة ثم تقييم اداء المقدرات باستخدام مقاييس مثل الانحياز ومتوسط مربعات الخطأ والتحقق من دقة واتساق المقدرات.

#### المرحلة الثالثة: التطبيق العملي والمقارنة

3. التطبيقات العملية على مجموعات بيانات حقيقية مختارة لتوضيح كفاءة التوزيع المقترح وتقييم أدائه من خلال اختبارات جودة ملائمه للبيانات ذات الذيل الثقيلة والانحرافات الكبيرة.

وتقييم اداء وجودة ملائمة التوزيع المقترح بالمقارنة مع بعض التوزيعات التنافسية الاخرى باستخدام المعايير الاحصائية لجودة الملاءمة، لمقارنة التوزيع المقترح مع توزيعاته الفرعية لاختبار المعنوية الاحصائية للمعلمات الاضافية في التوزيع الجديد ومعرفة هل توفر هذه المعلمات تحسناً معنوياً احصائياً في مرونة التوزيع المقترح عند مقارنته مع التوزيعات الفرعية وفي امكانية استخدامه كبديل ملائم

$$S(x) = 1 - \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right]^{1+\lambda} + \lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \quad (11)$$

$$h(x) = \frac{\alpha\theta\beta^{-\theta}(x)^{\theta-1}}{\left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} \left[ 1 + \lambda - 2 \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \right] \left[ 1 + \lambda - \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \right]$$

ويوضح الشكل (3): بعض منحنيات  $S(x)$  الموافقة لبعض القيم المحددة للمعاملات.

سوف نقوم بإعادة صياغة الدالة الاحتمالية والدالة التراكمية للتوزيع الجديد بصياغة أخرى حتى يتسنى لنا إيجاد بعض الخصائص الرياضية.

$$(1-z)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j)}{j! \Gamma(k)} z^j, \quad |z| < 1, \quad k > 0.$$

$$g(x) = \frac{\alpha\theta\beta^{-\theta}(x)^{\theta-1}}{\left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} \left[ 1 + \lambda - 2\lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \right] \quad (10)$$

حيث:  $\alpha, \theta > 0$  معلمات شكل،  $\beta > 0$  معلمة قياس وكذلك  $|\lambda| > 1$  معلمة تحويل حالات خاصة: يتضمن التوزيع  $TMOP(\theta, \beta, \lambda, \alpha)$  عدد من التوزيعات الاحتمالية المعروفة كحالات خاصة. ويوضح الجدول (1) بعضاً منها.

جدول (1): التوزيعات الفرعية لتوزيع TMOP

اسم التوزيع	المعالم
Marshall Olkin Power	$\lambda = 0$
(T-P) Transmuted-Power	$\alpha = 1$
Power	$\alpha = 1, \lambda = 0$

## 2. دالة البقاء ومعدل الخطر لتوزيع TMOP

تعطى دالة البقاء  $S(x)$  ودالة معدل الخطر  $h(x)$  للمتغير العشوائي  $X$  حيث  $X \sim TMOP(\theta, \beta, \lambda, \alpha)$  بالشكل:

تعطى العزوم من الرتبة  $r$  حيث  $X \sim TMOP(\theta, \beta, \lambda, \alpha)$  والتي يشار لها بـ  $\mu_r$  بالعلاقة:

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r f_{BTFR}(x) dx$$

$$= \int_0^\beta x^r \sum_{k=0}^\infty u_k h_{\beta, \theta(k+1)}(x) dx$$

$$- \int_0^\beta x^r \sum_{k=0}^\infty w_k h_{\beta, \theta(k+2)}(x) dx \quad (16)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty u_k \frac{\theta \beta^r (k+1)}{\theta(k+1) + r}$$

$$- \sum_{k=0}^\infty w_k \frac{\theta \beta^r (k+2)}{\theta(k+2) + r} \quad (17)$$

وباستخدام (17) يمكننا الحصول على الأربعة العزوم الأولى وإيجاد الخصائص الاحصائية للتوزيع مثل المتوسط والتباين والانحراف والتفرطح باستخدام العلاقة المعروفة.

$$E(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty u_k \frac{\theta \beta (k+1)}{\theta(k+1) + 1}$$

$$- \sum_{k=0}^\infty w_k \frac{\theta \beta (k+2)}{\theta(k+2) + 1} \quad (18)$$

$$g(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left[ u_k \theta(k+1) \beta^{-\theta(k+1)} x^{\theta(k+1)} - w_k \theta(k+2) \beta^{-\theta(k+2)} x^{\theta(k+2)} \right]$$

$$g(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left[ u_k h_{\beta, \theta(k+1)}(x) - w_k h_{\beta, \theta(k+2)}(x) \right], \quad (14)$$

حيث  $h_{\beta, \theta(k+1)}(x)$  هو توزيع القوة بالمعالم  $\beta, \theta(k+1)$

$$u_k = \frac{1+\lambda}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k,$$

$$w_k = \frac{\lambda(k+1)}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k.$$

$$G(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left[ u_k H_{\beta, \theta(k+1)}(x) - w_k H_{\beta, \theta(k+2)}(x) \right] \quad (15)$$

### 3. خصائص توزيع (TMOP)

#### (Mathematical Characterizations)

في هذا القسم، ندرس بعض خصائص التوزيع الجديد مثل العزوم والدالة المولدة للعزوم، دالة الكميات، الإحصاءات المرتبة.

#### 3.1 العزوم

تمثل العزوم أدوات مهمة في تحليل وفهم التوزيعات الاحتمالية وتقدير خصائصها الأساسية مثل الالتواء والتفرطح

--	--

3,3 الاحصاءات المرتبة

(Order statistics)

تعد إحصائيات الرتبة ذات أهمية في العديد من المسائل الإحصائية ولها تطبيقات عديدة في تحليل

الموثوقية واختبارات العمر وبافتراض أن

من  $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$  تمثل إحصاءات مرتبة، من

المعروف أن PDF للإحصاء  $X_{i:n}$  تعطى بالشكل:

$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} [1-F(x)]^{n-i} \quad (1)$	
---	--

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لإحصائية الرتبة من التوزيع الجديد كما يلي:

$f_{i:n}(x) = C_{i'n} \frac{\alpha \theta \beta^{-\theta} (x)^{\theta-1}}{\left( \alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x}{\beta} \right)^\theta \right)^2}$	
$\left[ \begin{array}{l} 1 + \lambda \\ - 2\lambda \left[ \frac{\left( \frac{x}{\beta} \right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x}{\beta} \right)^\theta} \right] \end{array} \right] \quad (2.3)$	2)

$E(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{\theta \beta^2 (k+1)}{\theta(k+1)+2} - \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{\theta \beta^2 (k+2)}{\theta(k+2)+2} ,$	
--	--

$E(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{\theta \beta^3 (k+1)}{\theta(k+1)+3} - \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{\theta \beta^3 (k+2)}{\theta(k+2)+3}$	
--	--

$E(x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{\theta \beta^4 (k+1)}{\theta(k+1)+4} - \sum_{k=0}^{\infty} w_k \frac{\theta \beta^4 (k+2)}{\theta(k+2)+4} \quad (21)$	
---	--

3.2 الدالة المولدة للعزوم (Mgf) تعطى كما يلي

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} E(X^r)$$

$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} u_k \frac{\theta \beta^r (k+1)}{\theta(k+1)+r} - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} w_k \frac{\theta \beta^r (k+2)}{\theta(k+2)+r} .$	
--	--

$$f_{1:n}(x) = n (F(x))^{n-1} f(x)$$

$$f_{n:n}(x) = \frac{n\alpha\theta \beta^{-\theta} (x)^{\theta-1}}{(\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta)^2}$$

$$\left[ 1 + \lambda - 2\lambda \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right] \quad (2.3)$$

$$\left[ \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{1+\lambda} - \lambda \left[ \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{n-1} \quad (25)$$

وكذلك توزيع إحصائية الرتبة الصغرى (الحد الأدنى)  $i=1$  نحصل على

$$\left[ \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{1+\lambda} - \lambda \left[ \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{i-1}$$

$$\left[ 1 - \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{1+\lambda} - \lambda \left[ \left[ \frac{(\frac{x}{\beta})^\theta}{\alpha + (1-\alpha)(\frac{x}{\beta})^\theta} \right] \right]^{n-i}$$

حيث  $C_{i/n} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$

ويعطى توزيع إحصائية الرتبة الكبرى (الحد الأعلى) بوضع  $i=n$  تعطى بالصيغة:

$$f_{1:n}(x) = \frac{n\alpha\theta \beta^{-\theta} (x)^{\theta-1}}{\left(\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2}$$

$$\left[ 1 + \lambda - 2\lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \right]$$

$$\left[ 1 - \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right] \right]^{1+\lambda}$$

$$- \lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} \right]^{n-1} \quad (26)$$

$$Q_x(p)$$

$$= \beta \left( \frac{-b + \alpha \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 4q + 2)}}{2a} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad ($$

حيث أن  $0 \leq q \leq 1$ ،

$$b = \alpha(1 + \lambda) + 2q\alpha(\alpha - 1)$$

$$a = 1 - \alpha - \alpha\lambda - q + 2\alpha q - \alpha^2 q$$

عندما  $P=0.25, 0.5, 0.75$

نحصل على الربع الأول والوسيط والربع الثالث للتوزيع الجديد على التوالي يجعل التعبير المغلق لدالة

**3.4** دالة الكميات ودالة توليد الأرقام العشوائية (Quantiles function & Random number generator)

دالة الكمية هي معكوس دالة التوزيع التراكمي (CDF) لأي توزيع احتمالي، بمصطلحات بسيطة فهي تعطي القيمة التي تحتها نسبة معينة من المشاهدات أو بالمقابل بمعلومية احتمال معين تخبرك بالقيمة التي تقابل هذا الاحتمال.

دالة الكمية لـ  $X$  هي الحل الحقيقي للمعادلة

$F(x)_q = q$  ومن ثم عن طريق عكس دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الجديد نحصل على:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha \theta \beta^{-\theta} (x_i)^{\theta-1}}{\left( \alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta \right)^2} \right)^{\lambda} \left[ 1 - 2\lambda \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta} \right] \quad (28)$$

بأخذ اللوغاريتم لدالة الإمكان نحصل على

$$\begin{aligned} (l(\theta)) &= n(\ln \alpha + \ln \theta - \theta \ln \beta) + \\ &(\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln (x_i) - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left( \alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda) \\ &- \frac{2\lambda \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta}{\alpha + (1-\alpha) \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^\theta} \quad (29) \end{aligned}$$

الكميات من السهل محاكاة ملاحظات عشوائية من التوزيع الجديد باستخدام العلاقة:

$$x_p = \beta \left( \frac{-b + \alpha \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 4U + 2)}}{2a} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

حيث  $U$  يتبع التوزيع المنتظم  $(0,1)$ .

### الفصل الثالث: تقدير المعالم (Parameter Estimation)

في الإحصاء، هناك طرق عدة لتقدير معالم التوزيع المجهولة هنا سوف نقدم طريقتين لتقدير معالم التوزيع الجديد حيث تم حساب التحيز ومتوسط مربعات الأخطاء للمعالم في كلا الطريقتين وإجراء مقارنة بين هذه الطرق لتحديد أفضل طريقة يمكن استخدامها في تقدير المعالم.

#### أولاً: طريقة الإمكان الأعظم

لنفرض أن  $z_1, z_2, \dots, z_n$  تمثل عينة عشوائية حجمها  $n$  من التوزيع الجديد ذي المعالم  $\theta, \beta, \lambda, \alpha$ ، وليكن  $v$  متجه المعالم من الرتبة  $4 \times 1$  لتحديد مقدرات الإمكان الأعظم لـ  $v$  تعطى دالة الإمكان الأعظم بالعلاقة:

لإيجاد (MLEs) نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى للدالة  $\ell(\Theta)$  بالنسبة للمعاملات  $\alpha, \theta, \beta, \lambda$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta} [1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}] / (\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta})^2}{1 + \lambda - 2\lambda \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}} \right]} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} = \\ \frac{n}{\theta} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta} * \ln \frac{x}{\beta}}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}} \\ - \frac{2\lambda \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta} \ln \frac{x}{\beta} (\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}) + 2(1 - \alpha)\lambda \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \ln \frac{x}{\beta}}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}\right)^2} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{1 + \lambda - \frac{2\lambda \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}} \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} &= \frac{-n\theta}{\beta} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \frac{(1-\alpha)\theta * \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \frac{x}{\beta^2}}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\left(2\theta\lambda\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \frac{x}{\beta^2} \left[\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}\right] - 2\theta(1-\alpha)\lambda\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta-1} \frac{x}{\beta^2}\right) / (\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta})}{1 + \lambda - \frac{2\lambda\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - 2\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}} \cdot \frac{2\lambda\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{1 + \lambda - \frac{2\lambda\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta}}}. \quad (33)$$

بعد مساواة المشتقات السابق بالصفر ولأنها معادلات غير خطية يصعب حلها بالطرق العادية، بل يتم استخدام احدى الطرق العددية وهنا تم استخدام طريقة

وبمساواة جميع المشتقات الأولى بالصفر نحصل على نظام معادلات غير خطي

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda)}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} - \frac{i}{1 + n} \right)$$

$$\left( \frac{2 \left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^3} - \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda)}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} \right) \quad (36)$$

نيوتن رافسون بمساعدة البرنامج الاحصائي SAS للوصول الى الحل.

ثانياً: طريقة المربعات الصغرى (LSE)

في هذه الطريقة نحن نبحث عن المعالم التي تجعل مربعات الأخطاء أقل ما يمكن وتأخذ هذه الطريقة الصيغة التالية:

$$LS = \sum_{i=1}^n \left( G(x_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (34)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة عن  $G(x_i)$  للتوزيع الجديد نحصل على طريقة المربعات الصغرى للتوزيع الجديد كما يلي

$$LS = \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\theta} \right] \left[ 1 + \lambda - \lambda \left[ \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\theta} \right] - \frac{i}{n+1} \right)^2 \right) \cdot \quad (35)$$

وللحصول على مقدرات المعالم نقوم بالاشتقاق بالنسبة للمعالم  $\alpha, \theta, \beta, \lambda$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda)}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} - \frac{i}{1 + n} \right)$$

$$\left( \frac{x(1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+2\theta} \theta(1 + \lambda)}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2 \beta^2} - \frac{x \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+\theta} \theta(1 + \lambda)}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right) \beta^2} + \frac{2x \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+2\theta} \theta \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2 \beta^2} - \frac{2x(1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-1+3\theta} \theta \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^3 \beta^2} \right) \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda)}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} - \frac{i}{1 + n} \right) \left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda) \text{Ln} \left[\frac{x}{\beta}\right]}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{(1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} (1 + \lambda) \text{Ln} \left[\frac{x}{\beta}\right]}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} - \frac{2 \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda \text{Ln} \left[\frac{x}{\beta}\right]}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} + \frac{2(1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{3\theta} \lambda \text{Ln} \left[\frac{x}{\beta}\right]}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^3} \right) \quad (37)$$

انتاج تقديرات قريبة من قيمة المعلمة الحقيقية. يمكن تحليل هذا المقياس على النحو التالي:

$$Bias(\Theta_i) = E(\hat{\Theta}_i - \Theta) = E(\hat{\Theta}_i) - \Theta \quad (40)$$

حيث:

$\hat{\Theta}_i$  : تمثل القيم المقدرة للمعالم وفقاً للطريقة المستخدمة للتقدير.

$\Theta$  : تمثل القيم الافتراضية لمعالم التوزيع.

- متوسط مربعات الخطأ (MSE)

هو مزيج من التحيز والتباين ويقاس متوسط الفرق التربيعي بين القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية. ويفضل المقدرات ذات متوسط الأخطاء التربيعية الأقل لأنها توفر تقديرات دقيقة ومستمرة. يمكن تحليل هذا المقياس كما يلي:

$$MSE(\hat{\Theta}) = (\hat{\Theta}_i - \Theta)^2 \quad (41)$$

وبالتالي يمكن حساب التحيز ومتوسط مربعات الأخطاء كما يلي

$$Bias(\hat{\Theta}) = \frac{\sum_{i=1}^k (\hat{\Theta}_i - \Theta)}{k} \quad (42)$$

$$MSE(\hat{\Theta}) = \frac{\sum_{i=1}^k (\hat{\Theta}_i - \Theta)^2}{k} \quad (43)$$

لأجل

$$\Theta = (\theta, \alpha, \beta, \lambda), \hat{\Theta} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}).$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta (1 + \lambda)}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta} \lambda}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} - \frac{i}{1 + n} \right)$$

$$\left( \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta}{\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta} - \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\theta}}{\left(\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{x}{\beta}\right)^\theta\right)^2} \right) \quad (39)$$

وبمساوات جميع المشتقات السابقة بالصفر نحصل على معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرق العادية وبالتالي نلجأ لاستخدام الطرق العددية لحلها ونحصل من خلالها على التقديرات للمعالم المجهولة. معايير مقارنة طرق التقدير

عند مقارنة طرق التقدير في الإحصاء، يمكن النظر في عدة معايير لتقييم أدائها وملاءمتها لمشكلة معينة. في هذه الدراسة سوف نستخدم معيارين وهما كما يلي - التحيز (Bias) يقيس التحيز مدى بعد القيمة المقدرة عن القيمة الحقيقية في المتوسط. تميل الطريقة ذات الانحياز المنخفض الى

## دراسة المحاكاة (Simulation Study)

تم اجراء دراسة محاكاة للتحقق من أداء مقدرات الإمكان الأعظم ومقدرات المربعات الصغرى لتوزيع مارشال اولكين القوة المحول (TMOP) باستخدام برنامج SAS وتم تنفيذه بعدة مراحل كما يلي:

## المرحلة الأولى

- هذه المرحلة يمكن تلخيصها على الخطوات الآتية:
- 1- اختيار قيم افتراضية لمعالم التوزيع الجديد.
  - 2- اختيار احجام عينات مختلفة لتحديد تأثيرها على نتائج التقدير.
  - 3- تكرار التجربة عدة مرات للحصول على نتائج أكثر دقة.

## المرحلة الثانية

يتم توليد أرقام عشوائية تتبع توزيعاً منتظماً ضمن الفترة (0,1)، ثم تحويل هذه الأرقام الى بيانات تتبع التوزيع الجديد باستخدام دالة الكمية.

$$x_q = \beta \left( \frac{-b + \alpha \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 4q + 2)}}{2a} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$0 \leq q \leq 1,$$

## المرحلة الثالثة

يتم تقدير معالم التوزيع باستخدام الطرق التي تم مناقشتها سابقاً.

## المرحلة الرابعة

تكرار هذه العملية 1000 مرة باستخدام برنامج SAS.

## المرحلة الخامسة

حساب التحيز ومتوسط مربعات الأخطاء ثم مقارنة الطرق من خلالها.

## -التحليل الاحصائي لنتائج المحاكاة:

1. بالنسبة للمقدرات أظهرت نتائج المحاكاة أن:

- جميع المعلمات تظهر انحيازاً موجباً، في العينات الصغيرة وبشكل عام التحيزات تتناقص الى الصفر مع زيادة حجم العينة ( $n \rightarrow \infty$ ) مما يتوافق مع خاصية عدم التحيز المقارب لـ MLE.
- تتناقص قيم MSE لكل معلمة إلى الصفر مع زيادة حجم العينة ( $n \rightarrow \infty$ )، مما يؤكد خاصية الاتساق لـ MLE.

- بشكل عام، تشير القيم الصغيرة للتحيزات ومتوسط مربعات الأخطاء الى أن طريقة المربعات الصغرى تؤدي أداءً جيداً في تقدير معالم التوزيع المقترح، مما يؤكد أن مقدر المربعات الصغرى لتوزيع (TMOP) مرضٍ حتى بالنسبة للعينات الصغيرة، وفعال بشكل مقارب ويمكن تقدير تباينه بشكل ملائم من معكوس مصفوفة المعلومات المرصودة.

- جعلت القيم المنخفضة للتقديرات للمعالم الإضافية للتوزيع، التوزيع أكثر مرونة مما يظهر كفاءته وملاءمته وقدرته التنافسية مقارنة بالعديد من التوزيعات الأخرى.

## الفصل الرابع: التطبيق العملي لتوزيع (TMOP)

هنا، تم تقديم تطبيق عملي لتوزيع (TMOP) على مجموعة من البيانات الحقيقية بهدف اختبار قدرته

3.667,3.667,3.700,3.733,3.733,3.733,  
3.767,3.767,3.800,3.833,3.833,3.833,  
3.867,3.867,3.900,3.900,3.933,4.000,  
4.000,4.067,4.100,4.100,4.133,4.200,  
4.233,4.333,4.367,,4.367,4.433,4.533  
,4.600,4.667,4.667,4.700,4.800,4.833

ويوضح الجدول (3) الخصائص الاحصائية الاساسية للبيانات ويشير الانحراف السالب (-) إلى قيم متطرفة طويلة الذيل ويؤكد التفرطح المرتفع (3.2761) وجود ذيول ثقيلة كما أن الوسيط (3.46667) أكبر من المتوسط (3.36319) يشير التي عدم تمثل البيانات. لذلك فإن هذه البيانات تمثل حالة واقعية للقيم المتطرفة غير المتماثلة مما يجعلها مناسبة لاختبار الاسئلة البحثية حول قدرة التوزيع على نمذجة البيانات المعقدة.

4.2 تم تقدير معلمات توزيع (TMOP) وتوزيعاته الفرعية P, TP, MOP باستخدام طريقة الامكان مع أخطاء معيارية مقدره باستخدام مصفوفة المعلومات المرصودة وهي موضحة في الجدول (4)

4.4 تم مقارنة أداء توزيع (TMOP) مع توزيعاته الفرعية باستخدام مجموعة المعايير المعلوماتية لجودة الملاءمة (IC) ويسرد الجدول (5) قيم هذه المعايير:  $\{-2\ell, AIC, CAI_C, BIC, HQIC\}$

#### مناقشة نتائج التطبيق العملي:

1. تظهر نتائج الجدول (4) كفاءة عالية للمقدرات، نظراً للقيم الصغيرة للأخطاء المعيارية، مما يؤكد الدلالة المعنوية للمعلومات الاضافية في تحسين مرونة النموذج

وكفاءته في النمذجة الإحصائية لبيانات ذات الخصائص المعقدة ولمقارنته أدائه مع ثلاثة من توزيعاته الفرعية وهي: توزيع (TP)، توزيع (MOP)، توزيع (P)، وتغطي دوال الكثافات الاحتمالية لهذه التوزيعات كما يلي  $(\beta > x > 0)$ :

$TP: g(x) = \frac{\theta}{\beta^\theta} x^{\theta-1} \left( 1 + \lambda - 2\lambda \left( \frac{x}{\beta} \right)^\theta \right)$
$MOP: f(x) = \frac{\alpha\theta \beta^{-\theta} (x)^{\theta-1}}{\left( \alpha + (1 - \alpha) \left( \frac{x}{\beta} \right)^\theta \right)^2}$
$P: f(x) = \theta\beta^{-\theta} x^{\theta-1}$

حيث

$$0 < x < \beta, \theta > 0, \beta > 0$$

4.1 وصف مجموعة البيانات: تتكون مجموعة البيانات الحقيقية من 96 مشاهدة تمثل أوقات تشغيل جهاز CPAP لحين العطل مقاسة بالأشهر عبد الحسن (2022) وهذه البيانات هي:

1.067,1.167,1.600,1.700,1.733,1.833,  
1.867,2.067,2.100,2.167,2.233,2.233,  
2.433,2.500,2.600,2.667,2.700,2.700,  
2.733,2.800,2.833,2.833,2.867,2.900,  
2.900,2.933,2.933,3.033,3.167,3.167,  
3.167,3.167,3.200,3.200,3.233,3.267,  
3.267,3.300,3.300,3.333,3.333,3.333,  
3.367,3.400,3.433,3.433,3.467,3.467,  
3.500,3.500,3.533,3.567,3.567,3.600,  
3.600,3.600,3.633,3.633,3.667,3.667,

TMOP عند مقارنته مع توزيعاته الفرعية حيث ساهمت معلمة التحويل تحسين الملاءمة، بينما اضافة معلمة الشكل مرونة معنوية. وهذا يجيب على السؤال البحثي حول دور تعميم بيتا والتحويل التربيعي في تحسين مرونة النموذج.

2. يتضح من نتائج الجدول (5) أن توزيع (TMOP) يحتوي على أدنى قيم لإحصائيات جودة الملاءمة  $\{-2\ell, AIC, CAI_C, BIC, HQIC\}$  مما يؤكد تفوق توزيع TMOP في نمذجة البيانات المتطرفة مقارنة بتوزيعاته الفرعية. مما يؤكد أهمية المعلمات الاضافية في تحسين مرونة توزيع

جدول (2): نتائج المحاكاة للمقدرات

		Sample Size				
N		25	50	70	100	150
MLS	$\hat{\alpha}$	0.98850480	0.9889183 0	0.98723250	0.98693610	0.98599740
	$\hat{\beta}$	2.30466200	2.3048724 0	2.30508460	2.30315780	2.30286260
	<b>Estimate</b>					
	$\hat{\theta}$	0.26673900	0.2654605 0	0.26421910	0.26330110	0.26281120
	$\hat{\lambda}$	0.93482390	0.9353267 0	0.93573460	0.93509860	0.93516870
	$\hat{\alpha}$	0.03554020	0.0177784 0	0.01267480	0.00886940	0.00590660
	$\hat{\beta}$	0.03218650	0.0160974 0	0.01150120	0.00803160	0.00535240
	<b>Biases</b>					
	$\hat{\theta}$	0.00266960	0.0013092 0	0.00091740	0.00063300	0.00041870
	$\hat{\lambda}$	0.01739300	0.0087065 0	0.00622480	0.00435100	0.00290110
	$\hat{\alpha}$	0.00127030	0.0003170 0	0.00016100	0.00007880	0.00003490
	<b>MSE</b>					
$\hat{\beta}$	0.00103920	0.0002596 0	0.00013240	0.00006460	0.00002870	

	$\hat{\theta}$	0.00000800	0.0000185 7	0.00000091	0.00000043	0.00000019
	$\hat{\lambda}$	0.00030270	0.0000758 0	0.00003880	0.00001890	0.00000842
	$\hat{\alpha}$	0.49938430	0.4994067 0	0.49943810	0.49945420	0.49949370
	$\hat{\beta}$	1.84841750	1.8476792 0	1.84640960	1.84575360	1.84410110
	<b>Estimate</b>					
	$\hat{\theta}$	0.29048570	0.2906311 0	0.29085740	0.29097240	0.29124940
	$\hat{\lambda}$	0.69932260	0.6993222 0	0.69932780	0.69933100	0.69933900
	$\hat{\alpha}$	0.01597540	0.0079881 0	0.00570630	0.00399450	0.00266330
	$\hat{\beta}$	0.01393670	0.0069536 0	0.00494870	0.00345750	0.00229400
	<b>Biases</b>					
LS	$\hat{\theta}$	0.00361940	0.0018126 0	0.00129800	0.00090970	0.00060830
	$\hat{\lambda}$	0.00797290	0.0039864 0	0.00284750	0.00199330	0.00132890
	$\hat{\alpha}$	0.00025520	0.0000638 0	0.00003260	0.00001600	0.00000709
	$\hat{\beta}$	0.00019470	0.0000485 0	0.00002450	0.00001200	0.00000527
	<b>MSE</b>					
	$\hat{\theta}$	0.00001310	0.0000032 9	0.00000169	0.00000083	0.00000037
	$\hat{\lambda}$	0.00006360	0.0000159 0	0.00000811	0.00000497	0.00000177
	$\hat{\lambda}$	0.00006340	0.0000158 0	0.00000808	0.00000400	0.00000176

جدول (3): الخصائص الاحصائية لبيانات أوقات تشغيل CPAP

n	Minimum	Mean	Median	Variance	Skewness	Kurtosis	Maximum
96	1.067	3.36319	3.46667	0.641053	-0.63475	3.2761	4.833

جدول (4): تقديرات الامكان الاعظم واخطائها المعيارية (بين قوسين)

Distribution	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
TMOP	0.8005884	3.8978455	2.0686514	0.5419979
	(0.0682013)	(0.0854836)	(0.1338806)	(0.0327778)
TP	-	3.9086133	0.680719	0.6928786
	-	(0.3734709)	(0.0533864)	(0.1728108)
MOP	0.489450	4.9221149	2.3398571	-
	(0.1244893)	(0.1393662)	(0.929574)	-
P	-	2.457715	1.0901624	-
	-	(0.1661729)	(0.0769601)	-

جدول (5): قيم احصائيات  $\{-2\ell, AIC, CAIC, BIC, HQIC\}$  لبيانات تشغيل CPAP

Distribution	$-2\hat{\ell}$	AIC	AICc	BIC	CAIC	Rank
TMOP	1.7348246	9.7348246	10.174385	19.992217	13.881030	1
TP	150.95950	156.95950	157.22037	164.65255	160.06916	2
MOP	256.84578	262.84578	263.10665	270.53882	265.95543	3
P	370.94691	374.94691	371.07595	380.07561	377.02002	4

وهي توزيع القوة المحول (TP) توزيع مارشال اولكين القوة (MOP) وتوزيع القوة (P). تم اشتقاق الخصائص الرياضية والاحصائية للتوزيع الجديد مثل العزوم، الدالة المولدة للعزوم، دالة الكميات وكذلك إحصاءات الترتيب وتحليل الموثوقية.

## الفصل الخامس: الاستنتاجات النهائية والتوصيات

### 5.1 الاستنتاجات (Conclusions)

في هذه الدراسة تم اقتراح وتدريب توزيع جديد يسمى توزيع مارشال اولكين القوة المحول (TMOP) ذو الأربع معالم تجعله أكثر مرونة في نمذجة البيانات، وهناك توزيعات تعتبر كحالات خاصة من هذا التوزيع

## قائمة المصادر والمراجع

### أولاً: المراجع باللغة العربية:

- [1] القدسي، ثورة. (2023). توزيع القوة الأسي المحول: النظرية والتطبيقات، المكتبة المركزية، جامعة صنعاء.
- [2] عبد الحسن، فلاح. (2022). تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال (NLTE-X Family) مع تطبيق عملي جامعة كربلاء.

### ثانياً: المراجع باللغة الإنجليزية

- [1] Afify, A., Alizadeh, M., Yousof, H., Aryal, G, and Ahmed, M. (2016). The transmuted Geometric-G family of distribution, *Pak.J. Statist* ,32(2),139-160.
- [2] Afify, A., Nofal, Z., Yousof, H., El Gebaly, Y, and Butt, N. (2015b). The transmuted weibull Lomax distribution: Properties and Applications, *Pakistan Journal of statistics and Operation Research* ,11(1),135-152.
- [3] Ahmed, H., Bdair, O, and Ahsanullah, M. (2017). Marshall –Olkin extended weibull distribution, *Journal of Statistical theory and Applications*,16(1),1-17.
- [4] Alabid, A. and Hurairah, A. (2019). Beta Transmuted power distribution: properties and applications, *Indonesian Journal of Statistics and Its Applications*,3(1),105-123.
- [5] Bain, L. J. (1978). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*, New York: Marcel Dekker.
- [6] Basheer, A.M. (2019). Marshall-Olkin Alpha power inverse Exponential distribution: Properties and Applications, *Annals of Data Science*, 9,301-313.
- [7] Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury: Thomson Learning.
- [8] Elbatal, I, and Aryal, G.(2013).On the Transmuted Additive Weibull Distribution, *AUSTRIAN JOURNAL OF STATISTICS* ,42(2),117-132.
- [9] Elbatal, I. and Merovci, F. (2014). Transmuted Lindley – Geometric distribution and its applications, *Journal of statistics Applications & Probability* ,3(1),77-91.
- [10] Elbatal, I., Asha, G. and Vincentraja, A. (2014). Transmuted exponentiated Fréchet distribution: Properties and Applications, *Journal of*

تم استخدام طريقتين للتقدير وتم إجراء دراسات المحاكاة لتقييم خصائص هذه المقدرات ثم اجري تحليل مقارنة بين الطرق باستخدام معايير محددة لاختيار طريقة التقدير الأكثر ملاءمة وهي التحيز ومتوسط مربعات الأخطاء، كشفت النتائج أن طريقة المربعات الصغرى هي التقنية الأكثر ملائمة لتقدير معالم التوزيع المقترح تم تطبيق توزيع TMOP على مجموعة بيانات حقيقية ومقارنة نتائجها مع توزيعاتها الفرعية، أظهرت احصائيات جودة المطابقة ومعايير المعلومات المستخدمة أن التوزيع الجديد أكثر كفاءة من التوزيعات الفرعية له كما في الجداول السابقة وأظهر التوزيع الجديد المقترح قد أظهر نتائج أفضل للبيانات من التوزيعات الأخرى الموجودة.

## 5.2 التوصيات (Recommendations)

بناءً على الإجراءات المستخدمة في هذه الدراسة واستنتاجاتها، نقدم عدد من التوصيات، والتي تساعد في إجراء المزيد من البحوث والدراسات.

1. استخدام طرق أخرى لتقدير معالم التوزيع الجديد (TMOP)، وخاصة الطرق غير المعلمية والبيزية، ومقارنتها بطرق التقدير التي تمت دراستها.

2. يوصى بتطبيق التوزيع الجديد على بيانات في مجالات أخرى مثل التجارة والصناعة لتأكيد مرونته وقدرته على التكيف مع البيانات المختلفة.

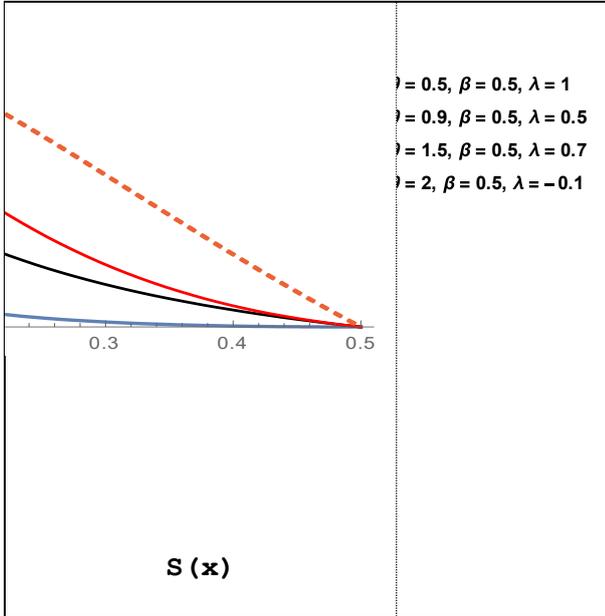
3. يوصى بتوسيع استخدام خارطة تحويل الرتب التريعية مع توزيعات أخرى حيث أن التوزيعات المحولة بشكل عام أكثر مرونة من التوزيعات المفردة.

4. مقارنة التوزيع الجديد مع توزيعات أخرى.

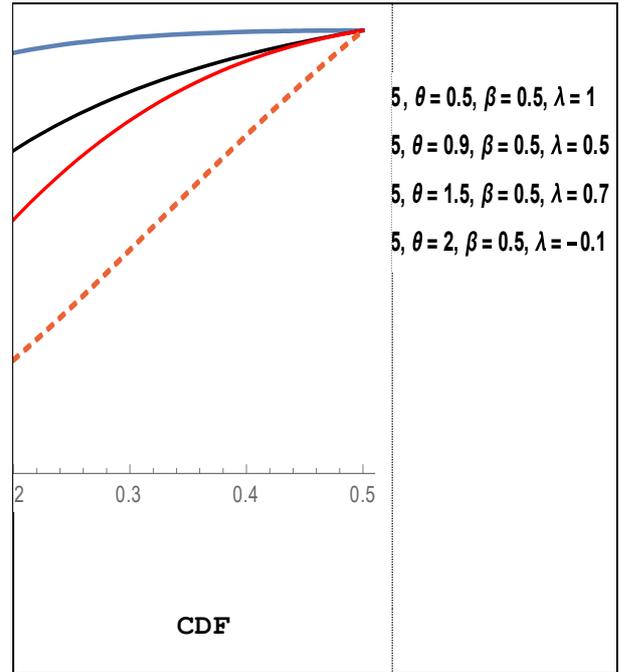
- [20] Okorie, I., E., Akpanta, A., C and Ohakwe, J. (2017). Marshall-Olkin Extended Power function distribution, *European Journal of Statistics and probability* ,5(3),16-29.
- [21] Rady, E.A., Hassanein, A.H., and ELhaddad, T.A. (2016). The Power Lomax distribution with an application to bladder cancer data, *Springer plus* ,5,1-22.
- [22] Saracoglu, B., and Tanis, C. (2021). A new lifetime distribution: transmuted exponential power distribution, *Commun.Fac. Sci.Univ. Ank.Ser. A1 Math. Stat*,70(1),1-14.
- [23] Shaw, W. and Buckley, I. (2007). The alchemy of probability distribution: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map, *arXiv preprint: arXiv:0901.0434v1*.
- [24] Tavanga, M. (2011) Power function distribution characterized by Dual Germanized order statistics, *Journal of Iranian statistical society* ,10,13-27.
- [25] Yousof, H., Afify, A., Alizadeh Morad. Butt, N, and Hamedani Gholamhossein. (2015). The transmuted Exponentiated Generalized-G family of distribution, mathematics, *statistics and computer science faculty research and publication*, 403,442-464.
- [26] Zhang, Sh., Bae, S., Bartolucci, A, and Singh, K. (2003). Power exponential distribution, *International Journal of Reliability and Applications*,4(3), 97-111.
- Statistics Applications &Probability* ,3(3),379-394.
- [11] Gupta, R.and Kundu, D. (2000). Generalized Exponential distribution: different method of estimations, *Journal of statistical Computation and simulation*, vol 00, 1-22.
- [12] Jose. (2011). Marshall –Olkin Family of Distribution and their applications in reliability theory, *Int.Statistical Inst.: Proc.58th world statistical congress*, 3918-3923.
- [13] Khan, M and Mustafa, A. (2002). The transmuted power hazard rate distribution and its applications, *International Journal of Mathematics and Computer Science*,17(4),1697-1713.
- [14] Krishna, E., Jose, K.K., Alice, T., and Ristic, M.M. (2013). The Marshall-Olkin Fréchet distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods* ,42(22),4091-4107.
- [15] Mansoor, M., Tahir, M.H., Cordeior, G.M., Provost, S.B., and Alizadeh, A. (2018). Marshall-Olkin Logistic-exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods* ,48(2),220-234.
- [16] Marshall, A, and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the Exponential and weibull families, *Biometrical*, 84,641-652.
- [17] Meniconi, M and Barry, D.M(1996). The Power function distribution: a useful and simple distribution to assess electrical component reliability, *Microelectronics Reliability*,36,1207-1212.
- [18] Nwezza, E.E., and Ugwuowo, F.I. (2021). The Marshall- Olkin –Gumbel extended Weibull distribution: properties and applications, *Afrika Statistika*,16(1),2603-2627.
- [19] Okasha, H.M., El-Baz, A.H., and Basheer, A.M. (2020). On marshall-olkin extended inverse weibull distribution Properties and Estimation using type –II censoring data, *Journal of statistics Applications &Probability letters* ,7(1),9-21.

<b>PDF</b>	
------------	--

شكل (2): دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع TMOP عند قيم مختلفة لمعالم التوزيع



شكل (3): دالة البقاء لتوزيع TMOP عند قيم مختلفة لمعالم التوزيع



شكل (1): دالة التوزيع التراكمية لتوزيع TOMP عند قيم مختلفة لمعالم التوزيع

