Sana'a University Journal of Human Sciences
مجلة جامعة صنعاء للعلوم الإنسانية
Vol. 4 | No. 10 | Page 352 – 375 |2025
https://journals.su.edu.ye/index.php/jhs
ISSN : 2958-8677

The Beta Transmuted Fréchet Distribution: Statistical Inference and Applications

Sami Abdullah Ali Othman[1,*]
[1]Department of Statistics and Information -Faculty of Commerce and Economics - Sana'a University, Sana'a, Yemen.
***Corresponding author:** *sa773202030mi@gmail.com*

Keywords

1. Fréchet distribution
2. Rank Transmutation Map
3. Beta generalized distribution
4. Beta Transmuted Fréchet distribution
5. Maximum likelihood estimation
6. Information Criterion

Abstract:

This study introduces a novel probability distribution known as the Beta Transmuted Fréchet Distribution (BTFr), which integrates the Rank Transmutation Map (RTM) and Beta Generalized (B-G) techniques with the classical Fréchet (Fr) distribution to enhance the capability and flexibility of statistical modeling for complex data characteristics (e.g., heavy tails and asymmetric skewness). The proposed distribution encompasses several well-known distributions as special cases and is characterized by five parameters, making it more flexible in representing asymmetric skewness and heavy tails compared to classical distributions like the original Fréchet (Fr) and its common generalizations (BFr, TFr, EFr). The study derives the mathematical properties of the new distribution, including survival and hazard functions, moments, quantiles, moment-generating functions, random number generation, and order statistics. Parameter estimation is performed using the maximum likelihood method (MLE), with the observed information matrix employed to estimate approximate variances of the estimators and construct confidence intervals. A simulation study evaluates the performance of the estimators in finite samples and analyzes their asymptotic efficiency, demonstrating their consistency and efficiency. The study also includes a practical application to two real-world datasets to illustrate the significance, efficiency, and utility of the proposed distribution in modeling complex data. The performance of BTFr is compared to its sub-distributions using well-known goodness-of-fit tests and likelihood ratio (LR) tests. The results confirm the superior fit and statistical significance of BTFr in representing and modeling extreme-value data, with the additional parameters providing a meaningful improvement in flexibility compared to its sub-distributions. The study recommends using this distribution in fields such as financial risk analysis and engineering reliability

Sana'a University Journal of Human Sciences
Vol. 4 | No. 10 | Page 353 – 375 | 2025
مجلة جامعة صنعاء للعلوم الإنسانية
https://journals.su.edu.ye/index.php/jhs
ISSN : 2958-8677

توزيع بيتا– فرشت المُحول: الاستدلال الإحصائي والتطبيقات

سامي عبد الله علي عثمان [1,*]
[1]قسم الإحصاء والمعلومات ، كلية التجارة والاقتصاد - جامعة صنعاء ، صنعاء ، اليمن.
*المؤلف: sa773202030mi@gmail.com

الكلمات المفتاحية

1. توزيع فرشت(Fr)
2. خريطة تحويل الرتبة (RTM)
3. توزيع بيتا المعمم (B-G)
4. توزيع بيتا فرشت المُحول (*BTFr*)
5. طريقة الإمكان الأعظم (MLE)
6. معايير جودة المطابقة (*IC*)

الملخص:

نُقدم في هذه الدراسة، توزيعًا احتماليًا جديدًا يُعرف باسم توزيع بيتا فرشت المُحول Beta Transmuted Fréchet(BTFr)، الذي يدمج بين تقنيتي خريطة تحويل الرتبة(RTM) Rank Transmutation Map وتعميم بيتا (B–G) Beta generalized مع توزيع فرشت الكلاسيكي Fréchet(Fr)، لتعزيز القدرة والمرونة على النمذجة الإحصائية للبيانات ذات الخصائص المعقدة. يتضمن التوزيع المقترح عدد من التوزيعات المعروفة كحالات خاصة، ويتميز بخمس معلمات، مما يجعله أكثر مرونة في تمثيل البيانات ذات الانحراف غير المتماثل والذيل الثقيل مقارنة بالتوزيعات الكلاسيكية مثل توزيع فريشت الاصلي(Fr) وتعميماته الشائعة مثل(BFr , TFr , EFr). اشتملت الدراسة على اشتقاق الخصائص الرياضية للتوزيع الجديد(بما في ذلك دوال البقاء، معدل الخطر، العزوم، الكميات ودوال توليد العزوم، والأرقام العشوائية وإحصاءات الترتيب)، تقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم(MLE)، مع حساب مصفوفة المعلومات المرصودة لتقدير التباينات التقريبية للمقدرات، ولبناء فترات الثقة التقريبية، كما أجرينا دراسة للمحاكاة لتقيم أداء المقدرات في العينات المحدودة ولتحليل الكفاءة المقاربة لها، وأظهرت النتائج اتساقًا وكفاءة تقاربية للمقدرات، كما تضمنت الدراسة تطبيق عملية على مجموعتين من البيانات الحقيقية لتوضيح أهمية وكفاءة وفائدة التوزيع المقترح في نمذجة البيانات ذات الخصائص المعقدة باستخدام اختبارات جودة التطابق الشهيرة، مع تقييم أدائه بالمقارنة مع التوزيعات الفرعية باستخدام معايير جودة الملاءمة واختبار نسبة الاحتمالية(LR). وأكدت النتائج جودة مطابقة وتفوقًا معنويًا لتوزيع (BTFr) في تمثيل ونمذجة البيانات المتطرفة، كما أن إضافة المعلمات الإضافية وفر تحسنًا معنويًا في مرونة توزيع (BTFr) عند مقارنته مع توزيعاته الفرعية. كما أوصت الدراسة باستخدام هذا التوزيع في مجالات تحليل المخاطر المالية والموثوقية الهندسية.

المقدمة:

في السنوات الأخيرة، شهد مجال النمذجة الإحصائية تطورًا كبيرًا في موضوع التوزيعات المعممة، من أجل تطوير توزيعات احتمالية جديدة أكثر مرونة وقدرة على تمثيل البيانات المعقدة في مختلف المجالات، مثل الهندسة، الاقتصاد، والعلوم البيئية. يُعد توزيع فرشت Fréchet Distribution(Fr)، الذي اقترحه عالم الرياضيات الفرنسي(Frechet,1924)أحد التوزيعات الاحتمالية المهمة في نظرية القيم المتطرفة، وجد هذا التوزيع تطبيقًا واسعًا في نظرية القيمة القصوى، وأُستخدِم بشكل واسع في نمذجة الظواهر الطبيعية والهندسية والمالية التي تتضمن قيماً قصوى مثل الزلازل والفيضانات وتحليل مخاطر الكوارث كسرعة الرياح القصوى وهطول الامطار السنوي والتيارات البحرية والتلوث الجوي،(kotz and Nadarajah,2000) وعلى الرغم من أهمية هذا التوزيع في نمذجة الأحداث المتطرفة ذات الذيل الثقيل إلا أن، الشكل المعياري لتوزيع(Fr) قد لا يكون مرناً بما يكفي لوصف وتمثيل بعض البيانات ذات الخصائص المعقدة التي تتميز بسلوك غير متماثل أو متعدد الانماط.

من هنا برزت الحاجة إلى تعميم توزيع(Fr) لتحسين مرونته في تمثيل بيانات بعض الظواهر المعقدة وزيادة قدرته على التكيف مع مجموعات البيانات المختلفة، مما يوسع نطاق تطبيقاته في مجالات مثل الإحصاء التطبيقي، الاقتصاد، والهندسة. وأُقترحت دراسة العديد من التعميمات لتوزيع(Fr) في السنوات القليلة الماضية، منها على سبيل المثال لا الحصر :توزيع Exponentiated-Fr، والذي يحتوي على معلمة شكل إضافية تزيد من مرونة التوزيع، تم اقتراحه ودراسته بواسطة Nadarajah and (kotz,2003) كتعميم مباشر، وأظهروا أن لديه مرونة أكبر من توزيع(Fr)، توزيعBeta-Fr الذي يستخدم دالة توزيع بيتا كمولد لتعميم توزيع (Fr) ويحتوي على معلمتين إضافيتين للشكل، ويتضمن توزيعات (Fr) و (EFr) كحالات خاصة، تم تقديمه ودراسته في سياق التوزيعات المولدة باستخدام دالة بيتا بواسطة Nadarajah & Gupta,2004 and Barreto-Souza, et al, 2011 وأظهروا أن لديه مرونة أكبر من توزيعات (Fr)و(EFr)، كما درس(Mead et al,2017) توزيع Beta Exponential Fréchet(BEFr)، والذي يستخدم التوزيع المركب BE كمولد لتعميم توزيع (Fr) و يتضمن التوزيعات (Fr) و (EFr) و (BFr) كحالات خاصة وأثبتوا تفوق هذا التوزيع على بعض التوزيعات التنافسية الاخرى. بالإضافة إلى ذلك قدم (Mahmoud&Mandouh,2013) توزيع Transmuted-Fr كتعميم مباشر لتوزيع (Fr) باستخدام تقنية خريطة تحويل الرتبة(RTM)، ويحتوي على معلمة شكل إضافية للتحكم في الانحراف، وأظهروا أن لديه مرونة أكبر من توزيع (Fr)، كما اقترح (Elbatal et al,2014) توزيع Transmuted Exponentiated-Fr والذي يستخدم تقنية خريطة تحويل الرتبة(RTM)، وأظهروا أن لديه مرونة أكبر من توزيع (Fr). وبالرغم من وجود العديد من التعميمات السابقة لتوزيع(Fr)، إلا أن هناك حاجة مستمرة لتطوير تعميمات جديدة تقدم مرونة إحصائية محسنة، خصوصًا في نمذجة سلوك الذيل ومعدل الفشل، مع الحفاظ على خصائص

التوزيع الأساسية. بالإضافة إلى أنه لا توجد دراسة سابقة تدمج بين تقنيتي خريطة تحويل الرتبة(RTM) وتعميم بيتا (B-G) لتعميم توزيع فرشت. لذلك تهدف هذه الدراسة إلى تقديم توزيع جديد ومبتكر، يدمج بين تقنيتي(RTM) وعائلة بيتا المعممة (B-G) مع توزيع(Fr)، يشار إليه باسم توزيع بيتا–فرشت المحول (BTFr) من خلال تعميم توزيع Transmuted Fréchet (TFr) الذي قدمه (Mahmoud&Mandouh,2013) باستخدام عائلة بيتا المعممة (B-G) .

مشكلة الدراسة وأسئلتها

توزيع(Fr) يواجه تحديات في وصف وتمثيل بعض البيانات ذات الخصائص المعقدة، التي تتميز بسلوك غير متماثل أو متعدد الانماط. كما أشارت العديد من الدراسات ومن هذه التحديات محدودية المرونة حيث اظهرت أعمال(Nadarajah&Kotz,2003) أن، توزيع(Fr) يعاني من قصور في نمذجة البيانات غير المتماثلة بسبب اعتماده على معلمتين فقط. كما أكد(Mahmoud &Mandouh,2013.) أن هذه المحدودية تؤثر على دقة النمذجة في التطبيقات العملية، بالإضافة إلى عدم كفاية التعميمات الحالية مثل(TFr) و(BFr) لبعض أنواع البيانات المتطرفة كما أشارت إلى ذلك دراسة (Eugene et al,2002). لذا جاءت هذه الدراسة لسد هذه الفجوة عبر تقديم توزيع (BTFr) والذي يجمع بين تقنية تعميم بيتا(لإضافة معلمتين) وتقنية التحويل (لإضافة معلمة خامسة) على توزيع (Fr).

لذلك تطرح هذه الدراسة السؤال الرئيسي التالي:

كيف يمكن تطوير تعميم جديد لتحسين مرونته وقدرته على نمذجة البيانات المتطرفة ولتوسيع مجالات تطبيقه وما هي الخصائص الإحصائية والرياضية للتوزيع الجديد وكيف تُقارن مع التوزيع الأصلي والتعميمات المعروفة.

الأسئلة البحثية الفرعية:

1.كيف يمكن استخدام تعميم (B-G) وتقنية (RTM) مع توزيع (Fr) لإنشاء توزيع جديد أكثر مرونة؟ يتمتع بمرونة أكبر في نمذجة البيانات المتطرفة؟

2.ماهي الخصائص الرياضية والإحصائية الأساسية للتوزيع الجديد؟

3.ماهي أفضل الطرق الملائمة لتقدير معلمات(BTFr) وكيف يمكن تقييم أداء هذه المقدرات عبر المحاكاة؟

4.هل يوفر التوزيع المقترح أداء أفضل في التطبيقات العملية بالمقارنة مع التوزيعات المعممة الأخرى في نمذجة البيانات المتطرفة ذات الخصائص المعقدة؟ وهل توفر المعلمات المضافة تحسنًا معنويًا إحصائيًا في مرونة التوزيع الجديد؟

فرضيات الدراسة

فرضية البحث الرئيسية: تفترض الدراسة أن التعميم الجديد(BTFr) سيظهر مرونة إحصائية محسنة في نمذجة البيانات المتطرفة غير المتماثلة ويوفر ملاءمة أفضل مقارنة بتوزيع فريشت القياسي والتعميمات الأخرى.

الفرضيات الفرعية:

1.مقدرات الإمكان الأعظم(MLEs)لمعلمات التوزيع المقترح ستتمتع بخصائص الاتساق والكفاءة المقاربة.

وهذا يودي إلى مقدرات ذات خطأ معياري قليل لذلك فإن النموذج سيمثل البيانات تمثيلًا جيدًا

2.معايير المعلومات (مثل المعايير المعلوماتية واختبارات جودة الملاءمة) ستظهر تفوقًا معنويًا لتوزيع(BTFr) في ملاءمة مجموعات بيانات حقيقية مختارة مقابل التوزيع الاصلي (Fr) وتوزيع (TFr) وتوزيع (BFr).

3.اختبارات نسبة الاحتمالية ستظهر أن المعلمات الإضافية تحسن معنويًا من مرونة التوزيع عند مقارنته مقابل توزيعاته الفرعية.

أهداف الدراسة:

الهدف العام: يهدف هذا البحث إلى تطوير توزيع احتمالي جديد يسمى توزيع بيتا-فرشت المحول Beta Transmuted Fréchet (BTFr) Distribution، يمتلك مرونة أعلى في نمذجة البيانات المتطرفة مقارنة بالتوزيعات الكلاسيكية بالإضافة إلى قدرة تحسينية على تمثيل البيانات غير المتماثلة ويعتمد على خمس معلمات تسمح بضبط دقيق لسلوك الذيل.

الأهداف الفرعية:

1. استخدام عائلة(B-G) التي اقترحها (Eugene et al,2002) وتوزيع (TFr) المقدم بواسطة (Mahmoud&Mandouh,2013) لبناء التوزيع الجديد بيتا-فرشت المحول (BTFr)واشتقاق الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح كدوال البقاء ومعدل الخطر، العزوم والكميات، دوال توليد العزوم والأرقام العشوائية وإحصاءات الترتيب.

3.تقدير معلمات التوزيع المقترح بطريقة الإمكان الأعظم(MLE)، وحساب مصفوفة معلومات فيشر المرصودة لتقدير التباينات التقريبية للمقدرات وبناء فترات الثقة التقريبية، مع إجراء دراسة للمحاكاة لتقيم أداء وكفاءة المقدرات، ودقة فترات الثقة.

4. تقديم تطبيق عملي على بيانات حقيقية لتوضيح أهمية وكفاءة التوزيع المقترح في النمذجة الإحصائية ولمقارنة أدائه مع التوزيعات المنافسة.

أهمية الدراسة:

تتمثل أهمية هذه الدراسة في سد الفجوات البحثية من خلال:

1. الإسهام في تطوير نظرية التوزيعات الاحتمالية من خلال تقديم تعميم جديد يجمع بين مزايا توزيع (Fr) وتقنية (RTM) وتعميم بيتا(B-G) .

2. إثراء الأدبيات الإحصائية المتعلقة بتعميمات توزيع (Fr) في نظرية القيم المتطرفة وفتح آفاق جديدة للبحث المستقبلي.

3.توفير توزيع إحصائي مرن وأكثر دقة لحل مشاكل نمذجة وتحليل البيانات المتطرفة ذات الخصائص المعقدة في مجالات متعددة مثل: العلوم البيئية والتحليل المالي وهندسة الموثوقية.

حدود الدراسة ومحدداتها

حدود الدراسة:

1.تقتصر الدراسة على تحليل توزيع فريشت فقط، وبعض تعميماته دون مقارنة شاملة مع جميع تعميماته الموجودة في الأدبيات.

2.صعوبة اشتقاق تعبيرات تحليلية مغلقة لبعض الخصائص الإحصائية مما يتطلب استخدام طرق عددية.

3.تعقيد الصيغ الرياضية لـ (BTFr) قد يزيد من صعوبة التحليل ويجعل تقديرات المعلمات أكثر صعوبة تحليليًا مقارنة بالتوزيعات البسيطة وهذا

يتطلب استخدام خوارزميات تحسين عددية لتقدير المعلمات.

4. اقتصار التطبيقات العملية على مجال تحليل ونمذجة بيانات الموثوقية والقيم المتطرفة.

محددات الدراسة:

1.تقتصر الدراسة على استخدام تقنيتين فقط للتعميم هما عائلة التحويل التربيعي وتعميم بيتا لتوزيع فرشت(دون استخدام تقنيات تعميم أخرى)

2. اقتصار منهجية التقدير على طريقة التقدير الأكثر شيوعًا وهي طريقة الإمكان الأعظم دون النظر إلى طرق تقدير أخرى

3. اقتصار التحليل الإحصائي في الجانب التطبيقي على اختبارات جودة المطابقة ومعايير المعلومات واختبار نسبة الاحتمالية دون النظر إلى مقاييس التنبؤ وتحليل البقاء.

التعريفات الاصطلاحية والإجرائية:

اشتملت الدراسة على التعريفات الاصطلاحية والإجرائية الاتية:

1. توزيع فرشت:Fréchet Distribution(Fr)

هو توزيع احتمالي مستمر لنمذجة القيم المتطرفة، يستخدم في تحليل البيانات ذات الذيل الثقيل(Nadarajah and Kotz,2003)، تعطى دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع (Fr) والذي يشار إليه بواسطة Fr(σ, μ) على النحو التالي(من أجل $x > 0$):

$$f(x;\sigma,\mu) = \mu\sigma^{\mu}\, x^{-(\mu+1)}\; e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}},\ x > 0 \qquad (1)$$

$$F(x;\sigma,\mu) = e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}},\ x > 0 \qquad (2)$$

حيث: $\sigma > 0$ و $\mu > 0$ هما على التوالي معلمتي المقياس (scale) و الشكل(shape) .

2.خريطة تحويل الرتبة(RTM) Rank Transmutation Map

تقنية لتعميم التوزيعات الاحتمالية، عن طريق إضافة معلمة تحكم لتحسين المرونة(Shaw and Buckley,2009)، وتعطى بالصيغة التالية:

$$G_{T-G}(x) = G(x)[1+\lambda-\lambda G(x)] \qquad (3)$$

$$g_{T-G}(x) = g(x)[1+\lambda-2\lambda G(x)] \qquad (4)$$

حيث $1 \geq |\lambda|$ هي معلمة التحويل.

وبتطبيق (T-G) على توزيع (Fr) نحصل على توزيع فرشت المحول(TFr) (Mahmoud&Mandouh,2013) وتعطى (CDF) و (PDF) لهذا التوزيع كما يلي(من أجل $x > 0$):

$$g_{TFr}(x) = \mu\sigma^{\mu}\, x^{-(\mu+1)}\, e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} \left[1+\lambda-2\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right] \qquad (5)$$

$$G_{TFr}(x) = e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} \left[1+\lambda-\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right] \qquad (6)$$

حيث: $\sigma > 0$ هي معلمة المقياس و $\mu > 0$ و $1 \geq |\lambda|$ هما على التوالي معلمتي الشكل و التحويل.

3.تعميم بيتا (B-G) Beta generalized

هي تقنية إحصائية لتعميم التوزيعات عن طريق إضافة معلمتي شكل إضافيتين لزيادة المرونة (Eugene et al, 2002) وتعدّ من أكثر طرق التعميم شيوعًا في الإحصاء، وتعطى بالصيغة التالية لنفترض أن $G(x)$ هي CDF لمتغير عشوائي X، فسيتم تعريف CDF لعائلة التوزيعات (B-G) بواسطة($x > 0$):

$$F(x) = \mathrm{I}_{G(x)}(a,b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} \int_{0}^{G(x)} t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt\,, \quad (7)$$

حيث : $a > 0\,, b > 0$ هما معلمات إضافية للشكل و $\mathrm{I}_{G(x)}(a,b) = \frac{\mathrm{B}_{G(x)}(a,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$ تشير إلى دالة(incomplete beta ratio) و $\mathrm{B}_u(a,b) = \int_0^u t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt$ فتشير إلى دالة(incomplete beta) و $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ هي دالة بيتا، أما $\Gamma(.)$ فهي دالة جاما. وفي المقابل، يتم تعريف PDF لعائلة التوزيعات (B-G) بواسطة($x > 0$):

$$f(x) \equiv \acute{F}(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{B}(a,b)}.\,[G(x)\,]^{a-1}\,.\,[1-G(x)\,]^{b-1} \quad (8)$$

حيث $g(x) = \frac{dG(x)}{d}$ تشير إلى PDF للتوزيع الأساسي، وعندما تكون $a = b = 1$ نحصل على PDF للتوزيع الأساسي. ومن السمات الجذابة لهذه العائلة هو أن المعالم الإضافية للشكل a, b يمكنها التحكم في الانحراف ووزن الذيل للتوزيع المُولّد, كما أنها توفر مرونة أكبر في شكل التوزيع المتولد وبالتالي في نمذجة البيانات المرصودة. حظيت عائلة (B-G) باهتمام كبير على مدار السنوات القليلة الماضية، على وجه الخصوص بعد الدراسات التي أجراها(Eugene et al ,2002) و (Jones, 2004). وأُستخدمت من قبل العديد من المهتمين والباحثين لاقتراح تعميمات للعديد من التوزيعات المعروفة. على سبيل المثال:اقترح (Mead et al,2017) توزيع Beta Exponential Fréchet، كتعميم للتوزيع المركب Exponential Fréchet باستخدام عائلة(B-G) اقترح (أحمد هريرة ، (2019))توزيع.Beta Transmuted Gumball ، من خلال تعميم توزيع Transmuted Gumball وقدم (Chhetri et al,2017)توزيع Beta Transmuted Pareto، ودرس(هريرة و العبيد، (2020)) توزيع Beta Transmuted Lomax ، ودرس(PAL and TIENSVWAN,2014) توزيع Beta Transmuted Weibull واقترح (هريرة و العبيد، (2020)) توزيع Beta Transmuted Power. ونحن بدورنا سنقوم بتعميم توزيع (TFr) باستخدام عائلة (B-G) التي اقترحها (Eugene et al,2002) من أجل إنشاء التوزيع الجديد توزيع بيتا–فرشت المحُول (BTFr) ونقدم وصفًا لبعض خصائصه الرياضية، وتطبيقه لتحليل مجموعات البيانات الحقيقية.

4.توزيع بيتا–فرشت المحُول (BTFr)

هو توزيع احتمالي مستمر يتم اشتقاقه من خلال تعميم توزيع(TFr) باستخدام تقنية (B-G).

5. طريقة الإمكان الأعظم(MLE): طريقة تقدير إحصائي تعمل على إيجاد قيم المعلمات المجهولة التي تعظم دالة الإمكان المشتقة من بيانات العينة.

6. المحاكاة: تقنية حسابية تعتمد على تكرار أخذ العينات العشوائية لدراسة الخصائص الإحصائية وتقييم أداء المقدرات.

7. معايير جودة الملاءمة(IC):معايير إحصائية لمقارنة النماذج تجمع بين دقة الملاءمة وعدد المعالم المقدرة وهي: معيـــــار معلومات(Akaika(AIC، معيار معلومات ((Akaika Corrected(CAIC)، معيار معلومات((Bayesian(BIC ، معـــــيار

معلـــومات (Hannan-Quinn (HQIC)) والتي تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned} AIC &= 2k - 2l(\widehat{\Theta}) \\ CAIC &= AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \\ BIC &= \log(n) - 2l(\widehat{\Theta}) \\ HQIC &= 2k\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(n)) - 2l(\widehat{\Theta}) \end{aligned} \qquad (9)$$

حيث $l(\widehat{\Theta})$ يشير القيمة العظمى لدالة الامكان اللوغاريتمية و K هو عدد المعلمات المقـــــدرة، n حجم العينة و Θ هي المعلمات. ووفقًا لهذه المعايير يتم اختيار النموذج الذي له أدنى قيمة لهذه المعيار كأفضل نموذج .

منهجية الدراسة وإجراءاتها:

اعتمدت هذه الدراسة على منهجية متكاملة ثلاثية الأبعاد تجمع بين :

1.التحليل النظري: لاشتقاق الخصائص الرياضية.

2.التحليل التطبيقي: للمحاكاة والتطبيقات.

3.التحليل المقارن: لتقييم الأداء مقابل التوزيعات التنافسية. وهذا التصميم الثلاثي هو الأمثل لدراسة التوزيعات الاحتمالية الجديدة وفقًا لـ (Nadarajah and Kotz,2003)

المراحل الإجرائية للمنهجية:

المرحلة الأولى: البناء النظري للتوزيع الجديد

1. مراجعة الأدبيات حول توزيع فرشت وتعميماته وتعميم بيتا.

2.اشتقاق التوزيع الجديد، واشتقاق الخصائص ويشمل تطبيق تقنية التحويل التربيعي على توزيع فرشت ثم تطبيق تقنية تعميم بيتا على الناتج من أجل اشتقاق دالة التوزيع التراكمية وكثافة احتمال التعميم الجديد واشتقاق دالة البقاء ودالة معدل الخطر واشتقاق الخصائص الرياضية والإحصائية للتوزيع الجديد كالعزوم والدالة المولدة للعزوم وإحصاءات الترتيب ودالة الكميات ودالة التوليد.

المرحلة الثانية: التقدير الإحصائي والمحاكاة

1. صياغة دالة الإمكان اللوغاريتمية للتوزيع وتقدير الإمكان الأعظم للمعلمات مع تحسين عددي باستخدام خوارزمية نيوتن- رافسون

2. استخدام مصفوفة المعلومات المرصودة لتقدير التباينات التقريبية للمقدرات، وبناء فترات الثقة التقريبية للمعلمات

3. استخدام المحاكاة لتوليد بيانات عشوائية من التوزيع وتطبيق طريقة تقدير الإمكان على البيانات المتولدة ثم تقييم أداء المقدرات باستخدام مقاييس مثل الانحياز والخطأ المعياري ومتوسط مربعات الخطأ والتحقق من دقة واتساق المقدرات.

المرحلة الثالثة: التطبيق العملي والمقارنة

4.التطبيقات العملية على مجموعات بيانات حقيقية مختارة لتوضيح كفاءة التوزيع المقترح وتقييم أدائه من خلال اختبارات جودة ملائمته للبيانات ذات الذيول الثقيلة والانحرافات الكبيرة.

وتقييم أداء ملاءمة التوزيع المقترح وجودته بالمقارنة مع بعض التوزيعات التنافسية الأخرى باستخدام المعايير الإحصائية لجودة الملاءمة. تطبيق اختبار نسبة الاحتمالية لمقارنة التوزيع المقترح مع توزيعاته الفرعية لاختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات الإضافية في التوزيع الجديد ومعرفة هل توفر هذه المعلمات تحسنًا معنويًا إحصائيًا في مرونة التوزيع المقترح عند مقارنته مع التوزيعات الفرعية وفي امكانية

استخدامه كبديل ملائم في التطبيقات لنمذجة البيانات المعقدة التي تستخدم في العادة مع التوزيعات الأخرى.

5. التحليل الإحصائي:

استخدام برمجيات إحصائية متخصصة مثل برنامج SAS لتنفيذ جميع التحليلات النظرية والتطبيقية.

هيكل البحث:

الفصل الثاني: توزيع بيتا فرشت المُحول

The Beta Transmuted Fréchet Distribution

هنا، نقوم باشتقاق CDF وPDF لتوزيع BTFr ذو خمس معلمات وهي(μ,σ,λ,a,b) والذي يشار إليه اختصارًا بـ $\mathrm{BTFr}(\mu,\sigma,\lambda,a,b)$ ، واشتقاق الدوال ذات الصلة كدالة البقاء ودالة معدل الخطر ، واشتقاق الخصائص الرياضية.

1. اشتقاق CDF وPDF لتوزيع BTFr

بتطبيق تقنية (B-G) على توزيع فرشت المحول (TFr)،(Mahmoud& Mandouh,2013) وبالتعويض عن $G(x)$ في المعادلة (7) بواسطة$G_{TFr}(x)$، نحصل على (CDF) كما يلي: $(x>0)$:

$$F_{BTFr}(x)=\frac{1}{B(a,b)}\int_{0}^{G_{TFr}(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = I_{G_{TFr}(x)}(a,b) \tag{10}$$

حيث: $a,b>0$ معلمات شكل إضافية،$I_{G_{TFr}(x)}(a,b)$ دالة بيتا غير المكتملة.

ويمكن التعبير عن $F_{BTFr}(x)$ بشكل مغلق باستخدام دالة جاوس الهندسية hyperometric ، على النحو التالي: (انظر cordeiro and Nadarajah, 2011)

$$F_{BTFr}(x) = \frac{G_{TFr}(x)^a}{B(a,b)}.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-b)_k\,G_{TFr}(x)^k}{k!\,(a+k)} \tag{11}$$

$$= \frac{G_{TFr}(x)^a}{a B(a,b)}.\ {}_2F_1\left(a,1-b;a+1;G_{TFr}(x)\right) \tag{12}$$

حيث: تشير${}_2F_1(C,d,e,\mathrm{z})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{\aleph}(d)_{\aleph}z^{\aleph}}{\aleph!(e)_{\aleph}}$ إلى الدالة الهندسية و $(c)_{\aleph}$ هو معامل تكراري تصاعدي ويعطى بالشكل:

$$(c)_{\aleph}=\begin{cases} c(c+1)(c+2)\ldots(c+k-1), & k=1,2,\ldots \\ 1 & ,\ k=0 \end{cases}$$

وبناءً على(12) فإن خصائص $_{BTFr}(x)$ يمكن من حيث المبدأ أن تتبع خصائص الدالة الهندسية. (انظر Gradshteyn and Ryzhik,2000 القسم 9.1)وباشتقاق(10)بالنسبة لـ x نحصل على PDF والتي ستكون بالصورة التالية:$(x>0)$

$$f_{BTFr}(x)=\frac{g_{TFr}(x)}{B(a,b)}.G_{TFr}(x)^{a-1}.\{1-G_{TFr}(x)\}^{b-1} \tag{13}$$

حيث: $g_{TFr}(\ \ )=\frac{d}{dx}G_{TFr}(x)$ وتكون الصيغة التفصيلية (13) بالشكل:

$$f_{BTFr}(x)=\frac{\mu\sigma^{\mu}\,x^{-(\mu+1)}}{B(a,b)}e^{-a\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}.\left[1+\lambda-2\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]\left[1+\lambda-\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]^{a-1}.\left\{1-e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\left[1+\lambda-\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]\right\}^{b-1} \tag{14}$$

حيث: $\sigma>0$ هي معلمة المقياس(تتحكم في الانتشار) و $\mu>0$ هما معلمة الشكل(تتحكم في شكل الذيل) و $|\lambda|\le 1$ هي معلمة التحويل(تتحكم في الانحراف) $a,b>0$ معلمات شكل (تتحكمان في التركيز والتفرطح) والشكل(1) يوضح بعض منحنيات$f_{BTFr}(x)$ عند قيم مختلفة للمعلمات.

حالات خاصة: يتضمن التوزيع $\mathrm{BTFr}(\mu,\sigma,\lambda,a,b)$ عدد من التوزيعات الاحتمالية المعروفة كحالات خاصة. ويوضح الجدول(1) بعضًا منها .

جدول(1): التوزيعات الفرعية لتوزيع BTF

المعالم	اسم التوزيع	المؤلف
$\lambda = 0$	(B-Fr) Beta-Fréchet	Nadarajah and Gupta,2004.
$a = b = 1$	(T-Fr) Transmuted-Fréchet	Mahmoud and Mandouh,2013.
$b = 1, \lambda = 0$	Exponentiated-Fréchet(E-Fr)	Nadarajah and Kotz,2003.
$\lambda = 0, a = b = 1$	Fréchet(Fr)	Fréchet,1924.

2. دالة البقاء ومعدل الخطر لتوزيع BTFr

تعطى دالة البقاء $S(x)$ ودالة معدل الخطر $\mathrm{h}(x)$ للمتغير العشوائي X حيث $X \sim \mathrm{BTF}r(\mu, \sigma, \lambda, a, b)$ بالشكل:

$$S_{BTFr}(x) = 1 - F_{BTFr}(x) = \frac{B_{1-G_{TFr}(x)}(b, a)}{B(a, b)} \qquad (15)$$

$$\mathrm{h}_{BTFr}(\mathrm{x}) = \frac{f_{BTFr}(x)}{S_{BTFr}(x)} = \frac{\mu\sigma^{\mu}\ x^{-(\mu+1)}\ e^{-a\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}}{B_{1-G_{TFr}(x)}(b, a)} \left[1 + \lambda - 2\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]\left[1 + \lambda - \lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]^{a-1} \left\{1 - e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\left[1 + \lambda - \lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]\right\}^{b-1} \qquad (16)$$

ويوضح الشكل (2): بعض منحنيات $\mathrm{h}_{BTFr}(\mathrm{x})$ الموافقة لبعض القيم المحددة للمعلمات.

3. خصائص توزيع (BTFr)

(Mathematical Characterizations)

هنا، نشتق تمثيلات متسلسلة لكل من CDF و PDF الخاصة بتوزيع (BTFr)، من خلال التعبير عنها على صورة مجاميع لانهائية مرجحة من CDFs و PDFs لتوزيع (exp-TFr) أو للتوزيع الأساسي Fr ، وتعد هذه التمثيلات مهمة ومفيدة لاشتقاق خصائص التوزيع كالعزوم ودوال توليد العزوم وإحصاءات الترتيب بسهولة من الخصائص المناظرة في توزيع Fr ، وبالإضافة إلى إيجاد دالة الكميات ودالة توليد الأرقام العشوائية لتوزيع(BTFr)

3.1 مفكوكات CDF و PDF لتوزيع BTFr (Expansions for the CDF and PDF)

باستخدام مفكوك ذو الحدين المعمم لـ: $(1-t)^{b-1}$ والمعطى بالصيغة التالية:(وذلك عندما $b > 0$ عدد حقيقي غير صحيح و $|t| < 1$)

$$(1 - t)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} \binom{b-1}{j} t^{j} \qquad (17)$$

حيث: $\binom{b-1}{j} = \frac{(-1)^{j}\,\Gamma(b)}{j!\,\Gamma(b-j)}$. يمكننا التعبير عن $F_{BTFr}(x)$ و $f_{BTFr}(x)$ على صورة مجاميع لانهائية مرجحة من تراكميات وكثافات توزيع (exp-TFr) أو على صورة مجاميع لانهائية مرجحة من تراكميات وكثافات توزيع قوى فرشت (exp-Fr) ، ثم نستخدم هذه المفكوكات للحصول الخصائص الرياضية لتوزيع(BTFr) كالعزوم ودوال توليد العزوم وإحصاءات الترتيب من تلك المناظرة لها في توزيع (exp-Fr)، بتطبيق(21) على (10) وحساب التكامل نحصل على:

$$F_{BTFr}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} \binom{b-1}{j} \frac{[G_{TFr}(x)]^{a+j}}{a + j} \qquad (18)$$

علاوة على ذلك تكتب المعادلة السابقة بالصورة:

$$F_{BTFr}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} t_{j} H_{a+j}(x) \qquad (19)$$

حيث:

$$H_{a+j}(x) = \left\{e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\left[1 + \lambda - \lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right]\right\}^{a+j}$$

و $t_{\mathrm{j}}=\frac{(-1)^{j}\binom{b-1}{j}}{\beta(a,b)\,(a+j)}$ وباشتقاق **(18)** نحصل على مفكوك $f_{BTFr}(x)$ كما يلي:

$$f_{BTFr}(x)=\sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} t_{\mathrm{j}} h_{\mathrm{a+j}}(x) \qquad (20)$$

حيث: $h_{\mathrm{a+j}}(x)$ هي كثافة توزيع exp-TFr يمكن اعتبار المعادلات**(19)**و**(20)** نتيجة رئيسية لهذا القسم وباستخدامها نستطيع الحصول على العديد من الخصائص الرياضية لتوزيع BTFr ببساطه من الخصائص المناظرة لها في توزيع وباستخدام التمثيلات**(17)** و (18) نستطيع التعبير عن $F_{BTFr}(x)$ و $f_{BTFr}(x)$ على صورة مجاميع لانهائية مرجحة من تراكميات وكثافات توزيع (Fr) كما يلي:

$$F_{BTFr}(x)=\sum_{j,s=0}^{\infty} \mathrm{w_{js}} G_{\mathrm{js}}(\mathrm{x}) \qquad (21)$$

حيث: $G_{\mathrm{js}}(\mathrm{x})$ هي CDF لتوزيع (Fr) بمعلمة مقياس $\sigma(\mathrm{a}+\mathrm{j}+s)^{1/\mu}$ ومعلمة شكل μ و

$$\mathrm{w_{js}}=\frac{(-1)^{j+s}\binom{b-1}{j}\binom{a+j}{s}}{\beta(\mathrm{a,b})(\mathrm{a+j})}\lambda^{s}(1+\lambda)^{\mathrm{a+j}-s}$$

وباشتقاق **(21)**نحصل على التمثيل المتسلسل لـ $f_{BTFr}(x)$ كما يلي:

$$f_{BTFr}(x)=\sum_{j,s=0}^{\infty} \mathrm{w_{js}}\, g_{\mathrm{js}}(\mathrm{x}) \qquad (22)$$

حيث: $g_{\mathrm{js}}(\mathrm{x})$ هي PDF لتوزيع (Fr) بمعلمة مقياس $\sigma(\mathrm{a}+\mathrm{j}+s)^{1/\mu}$ ومعلمة شكل μ والتي تعطى بالشكل:

$$g_{\mathrm{js}}(\mathrm{x})=(\mathrm{a}+\mathrm{j}+s)\mu\sigma^{\mu}x^{-(\mu+1)}\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{a+j}+s)(\frac{\sigma}{x})^{\mu}}$$

ويمكن أيضًا اعتبار المعادلات(21) و(22) نتائج نهائية لهذا القسم الفرعي وباستخدامها يمكننا اشتقاق الخصائص الرياضية لتوزيع BTFr كالعزوم ودوال توليد العزوم وإحصاءات الترتيب بسهولة من الخصائص المناظرة لها في توزيع (Fr) .

3.2 العزوم ودالة توزيع العزوم

العزوم مهمة وضرورية في أي تحليل إحصائي, خاصة في التطبيقات, وبواسطتها يمكن الحصول على أهم سمات وخصائص التوزيع مثل: الوسط والتشتت والانحراف والتفرطح. تعطى العزوم من الرتبة r لـX حيث $X\sim \mathrm{BTFr}(\mu,\sigma,\lambda,a,b)$ والتي يشار إليها بـ $\acute{\mu}_r$ بالعلاقة:

$$\acute{\mu}_r=E(X^r)=\int_0^{\infty} x^r f_{BTFr}(x)dx \qquad (23)$$

ومن (22) نحصل على

$$\acute{\mu}_r=E(X^r)=\sum_{j,s=0}^{\infty} \mathrm{w_{js}}\;\; E(Y_{js}^r) \qquad (24)$$

حيث $Y_{js}^r\sim \mathrm{Fr}(\mu,\sigma(\mathrm{a}+\mathrm{j}+s)^{1/\mu})$ ومن عزوم توزيع $\mathrm{Fr}(\sigma,\mu)$ يكون العزم النهائي بالشكل

$$\acute{\mu}_r=E(X^r)=\sigma^r\Gamma\left[1-\frac{r}{\mu}\right] .\sum_{j,s=0}^{\infty} w_{js}\;(\mathrm{a+j+s})^{r/\mu}\;,\mu>r \qquad (25)$$

وباستخدام(25) يمكننا الحصول على الأربعة العزوم الأولى وإيجاد الخصائص الإحصائية للتوزيع مثل المتوسط والتباين والانحراف والتفرطح باستخدام العلاقة المعروفة.

العزوم المركزية (Moments central) من الرتبة n لـ X حيث $X\sim BTFr(a,b,\mu,\sigma,\lambda)$ ، تعطى بالصورة:

$$M_n = E(X-\acute{\mu}_1)^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\acute{\mu}_1^{(n-r)}E(X^r) \qquad (26)$$

$$M_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\acute{\mu}_1^{(n-r)}\sigma^r\Gamma\left[1-\frac{r}{\mu}\right] \qquad (27)$$

كما أن الدالة المولدة للعزوم (Mgf) تعطى كما يلي

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}E(X^r)$$

$$M_X(t) = \sum_{j,s=0}^{\infty} w_{js}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r\ \sigma^r\ (a+j+s)^{\frac{r}{\mu}}}{r!}\Gamma\left[1-\frac{r}{\mu}\right] \qquad (28)$$

3.3 الإحصاءات المرتبة (Order statistics)

هنا، نشتق PDF للإحصاءة ذات الرتبة i (والذي يشار إليها بـ $X_{i:n}$) في عينة عشوائية بالحجم n من توزيع BTFr وبافتراض أن $X_{(1)} < \cdots < X_{(n)}$ تمثل إحصاءات مرتبة، من المعروف أن PDF للإحصاءة $X_{i:n}$ تعطى بالشكل:

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i,n-i+1)}f(x)F(x)^{i-1}.[1-F(x)]^{n-i} \qquad (29)$$

وباستخدام(21)و(22) يكون لدينا

$$f_{i:n}(x) = \frac{\mu\sigma^\mu x^{-(\mu+1)}}{B(i,n-i+1)}\left[1+\lambda-2\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu}\right] \times\left(\sum_{j,s=0}^{\infty} w_{js}\ (a+j+s)\ e^{-(a+j+s)\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu}\right) \times\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}\left(\sum_{j,s=0}^{\infty} w_{js}\ (a+j+s)\ e^{-(a+j+s)\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu}\right)^{i+k-1} \qquad (30)$$

وبوضع $u = e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu}$ ومن الصيغ الاتية:

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k\, u^{(k+l)} = \sum_{m=0}^{\infty} w_m^*\, u^m$$

$$\sum_{j,s=0}^{\infty} w_{js}(a+j+s)u^{(a+j+s)} = \sum_{m=0}^{\infty} m w_m^*\, u^m \qquad (31)$$

حيث: k $w_m^* = \sum_{k:k+1=m}^{\infty}$ وكذلك، من (Gradsteyn and Rzhik 2000,section0.314)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, u^k\right)^r = \sum_{k=0}^{\infty} d_{r,k}\, u^k \qquad (32)$$

يمكن التعبير عن **(31)** بالشكل التالي:

$$f_{i:n}(x) = \frac{\mu\sigma^\mu x^{-(\mu+1)}}{B(i,n-i+1)}\left(\sum_{m=0}^{\infty} m w_m^*\ u^m\right)\sum_{s=0}^{n-i}(-1)^s\binom{n-i}{s}\left(\sum_{m=0}^{\infty} d_{i+s-1,m}\ u^m\right) \qquad (33)$$

حيث: $d_{i+s-1,m} = (m w_0^*)^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\{q(i+s)-m\}w_m^*\, d_{i+s-1,m-q}$

و $d_{i+s-1,0} = (w_0^*)^{i+s-1} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\binom{b-1}{j}\frac{1}{\beta(a,b)(a+j)}\right)^{i+s-1}$

ويمكن كتابة **(34)** بالشكل التالي:

$$f_{i:n}(x) = \frac{\mu\sigma^\mu x^{-(\mu+1)}}{B(i,n-i+1)}\sum_{s=0}^{n-i}(-1)^s\binom{n-i}{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} m d_{i+s-1,t}\, w_m^*\right.$$

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i,n-i+1)}\sum_{s=0}^{n-i}(-1)^s\binom{n-i}{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{m d_{i+s-1,t}\, w_m^*}{m+t}\left\{(m+t)\mu\sigma^\mu x^{-(\mu+1)}e^{-(m+t)\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu}\right\}\right) \qquad (34)$$

ويكون الشكل النهائي كما يلي:

$$\boldsymbol{f_{i:n}(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} c_i(m+t)h_{m+t}(x)} \quad (35)$$

حيث: $c_i(m+) =$

$$\frac{1}{B(i,n-i+1)}\frac{m\,w_m^*}{m+t}\sum_s^{n-i}(-1)^s\binom{n-i}{s}d_{i+s-1,t}$$

و $h_{m+t}(\;)$ تشير إلى PDF لتوزيع (Fr) بمعلمة شكل μ ومعلمة مقياس $(\sigma(m+t))^{\frac{1}{\mu}}$ ويمكن استخدام (36)للحصول على عزوم الإحصاءات المرتبة من عزوم التوزيع الاصلي

3.4 دالة الكميات ودالة توليد الأرقام العشوائية

(Quantiles function& Random number generator)

دالة الكميات qf هي الحل الحقيقي للمعادلة:

$$\boldsymbol{F(x_q) = q\ ,\ \ 0 \le q \le 1} \qquad (36)$$

وبعكس CDF في (10) نحصل على دالة الكميات qf للمتغير العشوائي حيث $X \sim$ BTFr(a,b,μ,σ,λ) بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{x_q = \sigma(-LogZ)^{\frac{-1}{\mu}}} \qquad (37)$$

حيث : $Z \in (0,1)$ هو حل المعادلة التربيعية:

$$\lambda Z^2 - (1+\lambda)\mathrm{Z} + \mathrm{I}_q^{-1}(a,b) = 0$$

والذي يعطى بالصورة

$$\boldsymbol{Z = \frac{(1+\lambda) - \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4\lambda \mathrm{I}_q^{-1}(a}}{2\lambda}} \quad (38)$$

و $\mathrm{I}_q^{-1}(,b)$ هو معكوس دالة بيتا الناقصة بالمعالم a,b . وأخيرًا بتعويض (39) في (38) نحصل على دالة الكميات qf لتوزيع BTFr:

$$\boldsymbol{x_q = \sigma\left\{-Log\left(\frac{(1+\lambda)+\sqrt{(1+\lambda)^2-4\lambda \mathrm{I}_q^{-1}(a,b)}}{2\lambda}\right)\right\}^{\frac{-1}{\mu}}} \quad (39)$$

ومن (40) يمكن الحصول على الكميات الأتية :

$$\mathrm{Q}_3 = \mathrm{Q}_{0.75}\ ،\ \mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_{0.5}\ ،\ \mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_{0.25}$$

وباستخدامها يمكن الحصول على العديد من الخصائص والسمات العددية المميزة الاخرى لتوزيع (BTFr) على سبيل المثال الوسيط والانحراف الربيعي باستخدام الصيغ المناسبة لها.

وبنفس الأسلوب والطريقة في (40) يمكننا توليد أرقام عشوائية من توزيع (BTFr) على النحو التالي:

إذا كان U متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا مع المعلمات الموجبة b, a فان المتغير العشوائي:

$$\boldsymbol{X = \sigma\left(-\mathrm{Log}\left(\frac{(1+\lambda)+\sqrt{(1+\lambda)^2-4\lambda \mathrm{U}}}{2\lambda}\right)\right)^{\frac{-1}{\mu}}\ ,0<u<1} \qquad (40)$$

يتبع توزيع (BTFr) .

الفصل الثالث: تقدير المعالم:

(Parameter Estimation)

تتوافر في الإحصاء عدة طرق لتقدير المعلمات المجهولة في أي توزيع احتمالي، إلا أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، التي قدمها العالم (Fisher,1920) تعد من أهم الطرق وأكثرها استخدامًا في تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية، نظرًا لخصائصها المقاربة المثلى للمقدرات (Bain, 1978، Casella and Berger, 2002) والتي من أهمها الحالة الطبيعية المقاربة وخاصية التباينات التقريبية، كما أنها تمثل حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي، ويمكن استخدامها لبناء فترات ثقة تقريبية، وفي إحصائيات بعض الاختبارات، كما أنه يمكن التعامل مع التقريب الطبيعي لهذه المقدرات في نظرية العينات الكبيرة بسهولة إما عدديًا أو تحليليًا.

(Afify at al,2017) ، كما أن مصفوفة معلومات فيشر المرصودة تؤدي دورًا مهمًا في الاستدلال خاصة في تقدير التباينات التقريبية وبناء فترات الثقة واختبارات الفروض (بطريقة والد) ودقة التقدير واختيار النموذج الافضل،(Ly et al ,2017)، في هذه الدراسة، نستخدم (MLE) لتقدير معلمات توزيع (BTFr)، مع حساب مصفوفة المعلومات المرصودة، لتقدير التباينات التقريبية للمقدرات ولبناء فترات الثقة التقريبية ولتقييم ادائها من خلال استخدام أسلوب المحاكاة .

3.1 تقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات BTFr
Maximum likelihood estimation on the parameters

بافتراض أن $(X_1, X_2, \dots, X_n) = \_\_$ عينة عشوائية من توزيع (BTFr)، وأن $\boldsymbol{\Theta} = (\mu, \sigma, \lambda, a, b)^T$ هو متجه للمعلمات غير المعروفة، ومن أجل قيمة ملاحظة $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ للعينة $\underline{X}$ فإن دالة الامكان اللوغاريتمية لـ $\boldsymbol{\Theta}$ والذي يشار إليها بـ $\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \log \mathrm{L}(\boldsymbol{\Theta})$ تعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\ell(\Theta) &= n\log\mu + n\mu\log\sigma - n\log\beta(a,b)\\ &-(\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - a\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\mu}\\ &+\sum_{i=i}^{n}\log\left[1+\lambda-2\lambda\, e^{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\mu}}\right]\\ &+(a-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left[1+\lambda-\lambda\, e^{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\mu}}\right]\\ &+(b-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left\{1-e^{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\mu}}\left[1+\lambda-\lambda\, e^{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\mu}}\right]\right\}\end{aligned} \quad (41)$$

لإيجاد(MLEs) نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة $\ell(\boldsymbol{\Theta})$ بالنسبة للمعلمات $\mu, \sigma, \lambda, a, b$ (وهذه المشتقات مذكورة في البحث الأصلي الخاص بالمؤلف) للحصول على مكونات متجه القيم:

$$U = U(\boldsymbol{\Theta}) = \left(\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\Theta})}{\partial\mu}, \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\Theta})}{\partial\sigma}, \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\Theta})}{\partial\lambda}, \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\Theta})}{\partial a}, \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\Theta})}{\partial b}\right)^T$$

وبمساواة عناصر متجه القيم بالصفر نحصل على نظام المعادلات غير الخطي :

$$\boxed{\boldsymbol{U(\Theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\ell(\Theta)}{\partial\mu} = \frac{\partial\ell(\Theta)}{\partial\sigma} = \frac{\partial\ell(\Theta)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\ell(\Theta)}{\partial a} = \frac{\partial\ell(\Theta)}{\partial b} = 0} \quad (42)}$$

ونظرًا لتعقيد هذه المعادلات نستخدم خوارزمية عددية مثل نيوتن رافسون التكرارية للتحسين العددي بمساعدة البرنامج الإحصائي SAS للوصول إلى الحل.

3.2 تقدير الفترات لمعلمات BTFr
(Interval Estimation)

لحساب التباينات التقريبية لـ (MLEs) وبناء فترات الثقة التقريبية للمعلمات، نحتاج إلى مصفوفة المعلومات المرصودة (The observed information matrix) والتي نحصل على عناصرها من المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $\ell(\boldsymbol{\Theta})$ مصفوفة المعلومات المرصودة ذات الأبعاد 5×5 والتي يشار إليها بـ $J_n(\boldsymbol{\Theta}) = {}_n$ تعطى بالشكل:

حيث: $U_{rs}(\ \ ) = -\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\Theta})}{\partial r \partial s}\ ;\ r,s = \mu, \sigma, \lambda, a, b$

وفي ظل ظروف الانتظام، للمتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n$ والتي تتبع توزيع(BTFr), وعندما يكون حجم العينة n كبيرًا $(n \to \infty)$ فإن التوزيع المقارب لـ $\widehat{\Theta}_{ML}$ يكون طبيعي متعدد المتغيرات بمتوسط Θ ومصفوفة(تباين– تغاير) يمكن تقديرها بواسطة $J_n(\widehat{\boldsymbol{\Theta}})^{-1}$:(Lehmann,1983)

حيث : $\widehat{\Theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}, \hat{a}, \hat{b})^T$ و $\Theta = (\mu, \sigma, \lambda, a, b)^T$، و $J_n(\widehat{\Theta})$ هو إجمالي مصفوفة المعلومات المرصودة التي قُيمت عند $\Theta = \widehat{\Theta}$ والتي تعطى بالشكل: $J_n(\widehat{\Theta}) = \left(-\frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta^T}\right)_{\Theta=\widehat{\Theta}}$

وبناءً على التوزيع المقارب، يمكن حساب $100\%(1-\alpha)$ فترة ثقة تقريبية ذات اتجاهين لكل معلمة θ_i بالصيغة :

$$\boldsymbol{ACI(\theta_i\ , 1-\alpha)} = \left(\hat{\theta}_i - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{J_{ii}(\widehat{\Theta})}\ , \hat{\theta}_i + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{J_{ii}(\widehat{\Theta})}\right) \qquad (44)$$

حيث : $J_{ii}(\widehat{\Theta})$ هو العنصر القطري رقم (i, i) للمصفوفة: $J_n(\widehat{\Theta})^{-1}$ و $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي القياسي (Casella and Berger, 2002)،

3.3 دراسة المحاكاة (Simulationn Study)

لتقييم أداء المقدرات وفترات الثقة في العينات المحدودة قمنا بتنفيذ دراسة للمحاكاة

-تصميم تجربة المحاكاة:

استند تقييم سلوك العينة المحدودة لـ MLEs وفترات الثقة لمعلمات توزيع(BTFr)على ما يلي:

1. استخدام طريقة التحويل العكسي لتوليد 2000 عينة من توزيع(BTFr) مع القيم الافتراضية باستخدام دالة توليد الأرقام العشوائية:

$$X = \sigma\left(-\mathrm{Log}\left(\frac{(1+\lambda)+\sqrt{(1+\lambda)^2-4\lambda U}}{2\lambda}\right)\right) \qquad (46)$$

2. حساب MLEs من أجل كل عينة أي نوجد: $(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{\lambda}_i) \quad , i = 1,2, \dots, 2000$

$$\widehat{\Theta} \approx N_5\left(\Theta;\ J_n(\widehat{\Theta})^{-1}\right) \qquad (43)$$

3. حساب الأخطاء المعيارية لـ MLEs من أجل كل عينة أي نوجد: $(S_{\hat{\mu}}\ , S_{\hat{\sigma}_i}, S_{\hat{\lambda}_i}, S_{\hat{a}_i}, S_{\hat{b}_i}) \quad , i = 1,2, \dots, 2000$

يتم حساب الأخطاء المعيارية عن طريق معكوس مصفوفة المعلومات المرصودة التي تم تقيمها عند MLEs .

4.حساب التحيزات ومتوسطات مربعات الأخطاء بالصيغ الاتية:

$$\mathbf{Bias_{\theta}(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\hat{\theta}_i - \theta)}{k} \qquad (47)$$

$$\mathbf{MSE_{\theta}(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\hat{\theta}_i - \theta)^2}{k} \qquad (48)$$

لأجل $\theta = \mu, \sigma, \lambda, a, b$

5.حساب احتمالات الأخطاء الدنيا (L) والعليا (U) والإجمالية (T) لفترات الثقة لمستوى المعنوية $\gamma = 0.05$ بالصيغ الاتية:

$$J_n(\Theta) = \begin{bmatrix} U_{\mu\mu} & U_{\mu\sigma} & U_{\mu\lambda} & U_{\mu a} & U_{\mu b} \\ U_{\sigma\mu} & U_{\sigma\sigma} & U_{\sigma\lambda} & U_{\sigma a} & U_{\sigma b} \\ U_{\lambda\mu} & U_{\lambda\sigma} & U_{\lambda\lambda} & U_{\lambda a} & U_{\lambda b} \\ U_{a\mu} & U_{a\sigma} & U_{a\lambda} & U_{aa} & U_{ab} \\ U_{b\mu} & U_{b\sigma} & U_{b\lambda} & U_{ba} & U_{bb} \end{bmatrix} \qquad (45)$$

$$\mathbf{L}_{\theta}(n) = \frac{\left\{\hat{\theta} + \zeta_{(1-\frac{\gamma}{2})}\mathbf{S}\left(\hat{\theta}\right) < \theta_0\right\}}{k} \qquad (49)$$

$$\mathbf{U}_{\theta}(n) = \frac{\left\{\hat{\theta} - \zeta_{(1-\frac{\gamma}{2})}\mathbf{S}\left(\hat{\theta}\right) > \theta_0\right\}}{k} \qquad (50)$$

لأجل $\theta = \mu, \sigma, \lambda, a, b$ حيث: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي القياسي ، θ_0 القيمة الحقيقية للمعلمة.

6. نكرر الخطوات السابقة لعينات بأحجام مختلفة $n = \{10,,30,50,80,100,200\}$ ونحسب متوسطات التقديرات MLEs والاخطاء المعيارية(SE) لها و وقيم المعايير $Bias_{\theta}(n)$ و $MSE_{\theta}(n)$ و $\mathrm{L}_{\theta}(n)$ ، $\mathrm{U}_{\theta}(n)$ لأجل $\theta = \mu, \sigma, \lambda, a, b$وهي موضحة في الجدول(2)

–التحليل الإحصائي لنتائج المحاكاة :

1.بالنسبة للمقدرات أظهرت نتائج المحاكاة أن:

– جميع المعلمات تظهر انحيازًا موجبًا، في العينات الصغيرة وبشكل عام التحيزات تتناقص إلى الصفر مع زيادة حجم العينة $(n \to \infty)$ مما يتوافق مع خاصية عدم التحيز المقارب لـ MLE.

– تتناقص قيم MSE لكل معلمة إلى الصفر مع زيادة حجم العينة$(n \to \infty)$، مما يؤكد خاصية الاتساق لـ MLE.

- بشكل عام، تشير القيم الصغيرة للتحيزات والأخطاء المعيارية ومتوسط الأخطاء التربيعية إلى أن طريقة الاحتمالية القصوى تؤدي أداءً جيداً في تقدير معلمات التوزيع المقترح، وهذا كما هو متوقع نظرًا لخصائص العينة الكبيرة لمقدر الاحتمالية القصوى ، مما يؤكد أن مقدر الاحتمالية القصوى لتوزيع (BTFr) مرضٍ حتى بالنسبة للعينات الصغيرة ، وفعال بشكل مقارب ويمكن تقدير تباينه بشكل ملائم من معكوس مصفوفة المعلومات المرصودة .

2.بالنسبة لفترات الثقة أظهرت نتائج المحاكاة مايلي:

–بشكل عام احتمالات الخطأ الكلي (T) لكل معلمة لا يُحقق احتمال الخطأ الإسمي عند أحجام العينة الصغيرة بالتالي فإن احتمالات فترة الثقة تميل إلى أن تكون غير محافظة، بينما يتحقق احتمال الخطأ الإسمي عند أحجام العينات الكبيرة، وتكون احتمالات فترات الثقة محافظة. كما تقترب احتمالات الخطأ الكلي (T) لكل معلمة من احتمال الخطأ الاسمي مع زيادة حجم العينة مما يؤكد أن احتمالات التغطية لفترات الثقة التقريبية تحقق مستوى الثقة الاسمي 95% (حسب نظرية العينات الكبيرة).

–يتحقق تماثل احتمالات الخطأ الأدنى والأعلى لكل معلمة عند مختلف أحجام العينات، وينخفض الفرق بينها إلى الصفر مع زيادة حجم العينة مما يؤكد انخفاض لمتوسطات أطول التغطية لفترات الثقة لكل معلمة إلى الصفر مع زيادة حجم العينة.

الفصل الرابع: التطبيق العملي لتوزيع (BTFr)

هنا، قُدِّم تطبيق عملي لتوزيع (BTFr) على مجموعة من البيانات الحقيقية بهدف اختبار قدرته وكفاءته في النمذجة الإحصائية لبيانات ذات الخصائص المعقدة ولمقارنة أدائه مع أربعة من توزيعاته الفرعية وهي: توزيع(BFr)، توزيع(TFr)، توزيع(Exp–Fr)، توزيع(Fr)، وتعطى دوال الكثافات الاحتمالية لهذه التوزيعات كمايلي$(x > 0)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{BFr}: f(x) = \frac{\mu\sigma^{\mu}}{\beta(a,b)} x^{-(\mu+1)} e^{-a\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} . \left\{1 - e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right\}^{b-1} \\
&\mathbf{TFr}: f(x) = \mu\sigma^{\mu} x^{-(\mu+1)}\ e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} . \left[1 + \lambda - 2\lambda e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}\right] \\
&\mathbf{Exp-Fr}: f(x) = a\,\mu\,\sigma^{\mu} x^{-(\mu+1)} e^{-a\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} \\
&\mathbf{Fr}: f(x) = \mu\sigma^{\mu} x^{-(\mu+1)}\ e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}
\end{aligned} \tag{51}$$

4.1 وصف مجموعة البيانات: تتكون مجموعة البيانات الحقيقية من 100 مشاهدة حول أوقات

الانتظار (بالدقائق) قبل أن يتلقى العميل الخدمة في البنك، يمكن العثور عليها في (Ghitany et al.2008) وهذه البيانات هي:

0.8, 0.8, 1.3, 1.5, 1.8, 1.9, 1.9, 2.1, 2.6, 2.7 , 2.9, 3.1, 3.2 ,3.3 , 3.5 , 3.6 , 4.0 , 4.1 , 4.2, 4.2 4.4 , 4.6 , 4.7 , 4.7 , 4.8 , 4.9 , 4.9 , 5.0 , 5.3 , 5.5 , 5.7 , 4.3 , 6.1 , 6.2 , 6.2 , 6.2 , 6.3 , 6.7 , 6.9 , 7.1 4.3 , 7.6 , 7.7 , 8.0 , 5.2 , 7.1 , 7.1 , 7.1 , 7.4 , , 8.6 , 8.6 , 8.8 , 8.8 , 8.9 , 8.9 , 9.5 , 9.6 , 9.7 , 9.8 , 10.7 , 10.9 , 11.0 , 11.0 , 11.1 , 11.2 , 11.2 , 11.5 , 11.9 , 12.4 , 12.5 , 12.9 , 13.0 , 13.1 , 13.3 , 13.6 , 13.7 , 13.9 , 14.1 , 15.4 , 15.4 , 17.3 , 17.3 , 18.1 , 18.2 , 18.4 , 18.9 , 19.0 , 19.9 , 20.6 , 21.3 , 21.4 , 21.9 , 23.0 , 27.0 , 31.6 , 33.1 , 38.3

ويوضح الجدول(3) الخصائص الإحصائية الأساسية للبيانات ويشير الانحراف الموجب (1.489) إلى قيم متطرفة طويلة الذيل ويؤكد التفرطح المرتفع (5.55) وجود ذيول ثقيلة كما أن الوسيط (6.5) أقل من المتوسط (9.8) يشير التي عدم تمثل البيانات. لذلك فإن هذه البيانات تمثل حالة واقعية للقيم المتطرفة غير المتماثلة مما يجعلها مناسبة لاختبار الأسئلة البحثية حول قدرة التوزيع على نمذجة البيانات المعقدة واختبار الفرضية بأن التوزيع أكثر مرونة من التوزيعات الكلاسيكية.

4.2 قُدرت معلمات توزيع(BTFr) وتوزيعاته الفرعية BFr , TFr, EFr, Frباستخدام طريقة الإمكان مع أخطاء معيارية مقدرة باستخدام مصفوفة المعلومات المرصودة وهي موضحة في الجدول(4)

4.3 تم اختبار جودة ملاءمة توزيع (BTFr) لبيانات أوقات الانتظار عند مستوى معنوية 0.05 ،باستخدام الاختبارات: $A^*, W^*, \mathrm{K-S}$ ويُقدّم الجدول (5) نتائج هذه الاختبارات.

4.4 تم مقارنة أداء توزيع(BTFr) مع توزيعاته الفرعية باستخدام مجموعة المعايير المعلوماتية لجودة الملاءمة (IC) ويسرد الجدول(6) قيم هذه المعايير: $\{-2\ell\,, \mathrm{AIC}\,, \mathrm{CAI}_C\,, \mathrm{BIC}\,, \mathrm{HQIC}\}$

4.6 تم أيضًا إجراء اختبار نسبة الاحتمال(LR) ، للتحقق من أهمية المعلمات الإضافية ويُوضح الجدول(7) نتائج اختبار (LR) للفرضية الصفرية H_0 مقابل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى معنوية 0.05

4.7 مناقشة نتائج التطبيق العملي:

1. تظهر نتائج الجدول(4) كفاءة عالية للمقدرات، نظرًا للقيم الصغيرة للأخطاء المعيارية، مما يؤكد الدلالة المعنوية للمعلمات الإضافية في تحسين مرونة النموذج

2. تظهر نتائج الجدول (5) أن : P-value> 0.05 للاختبارات الثلاثة لذلك لا يوجد أي سبب لرفض H_0 ومن ثم نستنتج كفاءة توزيع BTFr في نمذجة البيانات المعقدة.

3. يتضح من نتائج الجدول(6) أن توزيع(BTFr) يحتوي على أدنى قيم لإحصائيّات جودة الملاءمة $\{-2\ell\,, \mathrm{AIC}\,, \mathrm{CAI}_C\,, \mathrm{BIC}\,, \mathrm{HQIC}\}$ ، مما يؤكد تفوق توزيع BTFr في نمذجة البيانات المتطرفة مقارنة بتوزيعاته الفرعية.

4.يتضح من نتائج اختبارات(LR) في الجدول(7) أن: p-value <0.05 للأربع الفرضيات ، لذلك يتم رفض H_0 لصالح H_1 (توزيعBTFr) مما يؤكد أهمية المعلمات الإضافية في تحسين مرونة توزيع BTFrعند مقارنته مع توزيعاته الفرعية حيث أسهمت معلمة التحويل تحسين الملاءمة، بينما إضافة معلمتي الشكل مرونة معنوية. وهذا يجيب عن السؤال البحثي حول دور تعميم بيتا والتحويل التربيعي في تحسين مرونة النموذج.

جدول(2) : نتائج المحاكاة للمقدرات وفترات الثقة

		الخصائص الإحصائية لـ MLEs لتوزيع (BTFr)				95%احتمالات الخطأ الدنيا والعليا والكلية لفترات الثقة لمعالم توزيع (BTFr)		
Sample size	**Parameter**	**Parameter Estimation**	**Bias**	**MSE**	**SE**	**Lower**	**Upper**	**Total**
10	μ	$\hat{\mu}$ = 1.2205139	0.1120514	0.0125555	0.0996134	0.1073237	0.1367791	0.2441028
	σ	$\hat{\sigma}$ = 0.477162	0.0277162	0.0007682	0.0471116	0.012845	0.1082773	0.0954324
	λ	$\hat{\lambda}$ = 0.6207641	0.0320764	0.0010289	0.0843201	0.0275793	0.0965735	0.1241528
	a	$\hat{a}$ = 0.699063	0.0299063	0.0008944	0.0017631	0.0237045	0.1161081	0.1398126
	b	=1.4357391$\hat{b}$	0.0935739	0.0087561	0.1649198	0.1241589	0.1629889	0.2871478
30	μ	$\hat{\mu}$ =1.2205139	0.0373505	0.0013951	0.0332045	0.0378494	0.0435181	0.0813676
	σ	$\hat{\sigma}$ = 0.477162	0.0092387	0.0000854	0.0157039	0.0042504	0.0275604	0.0318108
	λ	$\hat{\lambda}$ = 0.6207641	0.0106921	0.0001143	0.0281067	0.0140532	0.0273311	0.0413843
	a	$\hat{a}$ = 0.699063	0.0099688	0.0000994	0.0005877	0.0144106	0.0321936	0.0466042
	b	=1.4357391$\hat{b}$	0.0311913	0.0009729	0.0549733	0.0441215	0.0515944	0.0957159
50	μ	$\hat{\mu}$ = 1.2205139	0.0224103	0.0005022	0.0199227	0.023093	0.0257276	0.0488206
	σ	$\hat{\sigma}$ = 0.477162	0.0055432	0.0000307	0.0094223	0.0041265	0.01496	0.0190865
	λ	$\hat{\lambda}$ = 0.6207641	0.0064153	0.0000412	0.0168640	0.0093298	0.0155008	0.0248306
	a	$\hat{a}$ = 0.699063	0.0059813	0.0000358	0.0003526	0.0098488	0.0181137	0.0279625
	b	=1.4357391$\hat{b}$	0.0187148	0.0003502	0.0329840	0.0269782	0.0304513	0.0574296
80	μ	$\hat{\mu}$ = 1.2205139	0.0140064	0.0001962	0.0124517	0.0146055	0.0159073	0.0305128
	σ	$\hat{\sigma}$ = 0.477162	0.0034645	0.0000120	0.0058890	0.0032881	0.008641	0.011929
	λ	$\hat{\lambda}$ = 0.6207641	0.0040096	0.0000161	0.0105400	0.0062350	0.0092841	0.0155191
	a	$\hat{a}$ = 0.699063	0.0037383	0.0000140	0.0002204	0.0066964	0.0107801	0.0174766
	b	=1.4357391$\hat{b}$	0.0116967	0.0001368	0.0206150	0.0170887	0.0188048	0.0358935
100	μ	$\hat{\mu}$ = 1.2205139	0.0112051	0.0001256	0.0099613	0.0117394	0.0126709	0.0244103
	σ	$\hat{\sigma}$ = 0.477162	0.0027716	7.6819E-6	0.0047112	0.0028565	0.0066867	0.0095432
	λ	$\hat{\lambda}$ = 0.6207641	0.0032076	0.0000103	0.0084320	0.0051167	0.0072985	0.0124153
	a	$\hat{a}$ = 0.699063	0.0029906	8.9439E-6	0.0001763	0.0055296	0.0084517	0.0139813
	b	=1.4357391$\hat{b}$	0.0093574	0.0000876	0.0164920	0.0137434	0.0149713	0.0287148
200	μ	**$\hat{\mu}$ = 1.2205139**	**0.0056026**	**0.0000314**	**0.0049807**	**0.0059379**	**0.0062672**	0.0122051
	σ	**$\hat{\sigma}$ = 0.477162**	**0.0013858**	**1.9205E-6**	**0.0023556**	**0.0017087**	**0.0030629**	0.0047716
	λ	**$\hat{\lambda}$ = 0.6207641**	**0.0016038**	**2.5722E-6**	**0.0042160**	**0.0027181**	**0.0034895**	0.0062076
	a	**$\hat{a}$ = 0.699063**	**0.0014953**	**2.236E-6**	**0.0000882**	**0.0029788**	**0.0040119**	0.0069906
	b	**=1.4357391$\hat{b}$**	**0.0046787**	**0.0000219**	**0.0082460**	**0.0069616**	**0.0073958**	0.0143574

جدول (3): الخصائص الإحصائية لبيانات أوقات الانتظار

n	Minimum	Mean	Median	Variance	Skewness	Kurtosis	Maximum
100	0.8	9.777	6.499	52.763	1.488	5.548	38.5

جدول(4): تقديرات الإمكان الأعظم وأخطائها المعيارية (بين قوسين) لبيانات أوقات الانتظار

Distribution	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
BTFr(μ,σ,λ,a,b)	0.41447 (9.86E-6)	0.72294 (0.00012)	1.61126 (0.00102)	1.75529 (0.00021)	1.30621 (0.00044)
BFr(μ,σ,a,b)	1.23395 (0.00030)	1.91438 (0.00071)	- -	2.26156 (0.18417)	0.61609 (0.00453)
TFr(μ,σ,λ)	0.41303 (0.00016)	0.89309 (0.00023)	1E-6 (0.00095)	- -	- -
EFr(μ,σ,a)	0.36903 (0.00059)	0.25275 (0.00061)	- -	1.33685 (0.00471)	- -
)**Fr**(μ,σ)	0.73517 (0.00050)	1.67709 (0.00252)	- -	- -	- -

جدول(5): نتائج اختبارات: $A^*, W^*, \mathrm{K-S}$ لتوزيع **BTFr** لبيانات أوقات الانتظار

Distribution	A^*	P-value	W^*	P-value	K-S	P-value
BTFr	9.1657	0.0771	1.586	0.0918	0.2383	0.1051

جدول(6): قيم إحصائيات $\{-2\ell, \mathrm{AIC}, \mathrm{CAIC}, \mathrm{BIC}, \mathrm{HQIC}\}$ لبيانات أوقات الانتظار

Distribution	-2ℓ	AIC	AICC	BIC	HQIC
BTF	343.2412	353.2413	353.5562	367.6172	359.0829
BF	358.2911	368.2911	368.6061	382.6671	374.1327
TF	464.4078	474.4078	474.7228	488.7838	480.2494
EF	465.9191	475.9191	476.2341	490.2951	481.7607
F	466.4427	476.4427	476.7576	490.8187	482.2843

جدول(7): نتائج اختبار **LR** لبيانات أوقات الانتظار

توزيع BTF مقابل توزيعاته الفرعية	الفرضية الصفرية و البديلة		LR-test statistic	df	p-value
	H_0	H_1			
BTF vs BF	$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$	3.63	1	0.000
BTF vs TF	$a = b = 1$	$a \neq 1, b \neq 1$	14.52	2	0.000
BTF vs EF	$b = 1$, $\lambda = 0$	$b \neq 1$, $\lambda \neq 0$	46.92	2	0.000
BTF vs F	$a = b = 1, \lambda = 0$	$a \neq 1, b \neq 1, \lambda \neq 0$	60.92	3	0.000

الفصل الخامس: الاستنتاجات النهائية والتوصيات

5.1 الاستنتاجات (Conclusions)

شهد العقد الماضي اهتمامًا كبيرًا بين الإحصائيين لتطوير عائلات جديدة من التوزيعات المعممة والتي استخدمت لاقتراح تعميمات للعديد من التوزيعات الكلاسيكية ، وفي هذه الدراسة، قدمنا توزيع جديد يسمى بتوزيع بيتا فرشت المحول(BTFr)، وهو تعميم لتوزيع (TFr) باستخدام عائلة (B-G) ويحتوي على خمس معلمات توفران مرونة في نمذجة البيانات المرصودة، ويتضمن توزيع BFr وتوزيع EFr وتوزيع

TFr وتوزيع Fr كحالات خاصة. التوزيع الجديد (BTFr) يعمم العديد من التوزيعات المعروفة مثل توزيع BFr ، وتوزيع TFr ، وتوزيع EFr ، وتوزيع Fr، من خلال إضافة معلمة واحدة للشكل ومعلمتين وثلاث معالم على التوالي، لذلك يمكن استخدامه من قبل الممارسين كأداة إضافية لتحليل البيانات التي قد تستخدم في العادة مع الأربعة التوزيعات الأخرى. قدمنا مفكوكات هامة ومفيدة لكثافة وتراكمية توزيع (BTFr)، من خلال التعبير عنها على صورة مجاميع لانهائية مرجحة من كثافات وتراكميات توزيع (Fr) واستخدمناها لاشتقاق بعض الخصائص الرياضية لتوزيع (BTFr) بسهولة من الخصائص المناظرة في توزيع (Fr).تمت مناقشة تقدير معلمات توزيع (BTFr) بطريقة الإمكان الأعظم للتقدير ، وتم حساب مصفوفة معلومات فيشر المرصودة، والتي استخدمت لتقدير التباينات التقريبية وتقدير فترات الثقة لمعلمات توزيع (BTFr)، قُدمت دراسة للمحاكاة للتحقق من الكفاءة المقاربة للمقدرات، وتقييم ادائها وأداء فترات الثقة . لقد ثبُت ، من خلال تطبيق التوزيع(BTFr) والتوزيعات الفرعيةBFr ، TFr ، EFr ، Fr على مجموعتين من البيانات الحقيقية ، وبالاعتماد على بعض اختبارات جودة التوافق ، والأخطاء المعيارية لـ (MLEs) والمعايير المعلوماتية $\{-2\ell\,, AIC\,, CAI_C\,, BIC\,, HQIC\}$ واختبار نسبة الإمكان، أن توزيع (BTFr) يوفر ملاءمة أفضل لنمذجة البيانات المعقدة ويتفوق على توزيعاته الفرعية .

5.2 التوصيات (Recommendations)

بناءً على الإجراءات المستخدمة في هذه الدراسة واستنتاجاتها ، نقدم عدد من التوصيات، والتي تساعد في إجراء المزيد من البحوث والدراسات.

1. يمكن إجراء دراسة مستقبلية لاقتراح ودراسة تعميم جديد لتوزيع (TFr) باستخدام عائلة توزيعات Kumaraswamy generalized التي اقترحها (Cordeiro and Castro,2009)
2. يمكن إجراء دراسة مستقبلية لتقدير معلمات توزيع (BTFr) باستخدام طرائق تقدير أخرى مثل طريقة العزوم والطريقة البيزيه وغيرها ومقارنتها بالطريقة المستخدمة في هذه الدراسة.
3. استخدام طرائق محاكاة أخرى مثل البوستراب (Bootstrap) ومونتي كارلو (Carlo Monte) ومقارنتها بالطريقة المستخدمة في هذه الدراسة.
4. يمكن إجراء دراسة مستقبلية لمقارنة ملاءمة توزيع (BTFr) مع بعض التعميمات الاخرى لتوزيع (Fr)غير متداخلة مع توزيع(BTFr) أو مع توزيعات مركبة محولة اخرى لها نفس عدد معالم توزيع(BTFr).
5. استخدام توزيع(BTFr) لتحليل البيانات في المجالات المختلفة.

قائمة المصادر والمراجع

أولاً: المراجع باللغة العربية:

[1] النصراوي، هدير سعدي صاحب. (2022). التحويل التربيعي للتوزيع المركب الجديد (أسي- فريجت)، (رسالة ماجستير): جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.

[2] مصطفى، عبدالحفيظ. (1999). الاستدلال الإحصائي (1) نظرية التقدير، مصراته، الجماهيرية الليبية: مجموعة النيل العربية.

[3] هرمز، أمير حنا. (1990). الإحصاء الرياضي، جامعة الموصل، العراق: مديرية دار الكتب للطباعة والنشر.

[4] الصياد، جلال مصطفي. (1993). الاستدلال الإحصائي، الرياض، المملكة السعودية العربية: دار المريخ.

[5] القدسي، ثورة . (2023). توزيع القوة الأسي المحول: النظرية والتطبيقات ، المكتبة المركزية، جامعة صنعاء.

ثانياً: المراجع باللغة الانجليزية

[1] Aryal, G. R. & Tsokos, C. P. (2009). On the transmuted extreme value distribution with application. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71:1401–1407, doi:10.1016/j.na.2009.01.168

[2] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19(6): 716–723.

[3] Azzalini, A. (1996). Statistical Inference Based on the Likelihood. London: Chapman & H.

[4] Hurairah, A. A. (2019), "The Beta Transmuted Gumbel Distribution: Theory and Application" , International Journal of Scientific Research inMathematical and Statistical Sciences, Vol. 6(6), pp. 76-85.

[5] Alobid, A. & Hurairah, A. A. (2019). The Beta Transmuted Power Distribution: Properties and Applications. Indonesian Journal of Statistics and Its Applications, 3(1): 105-123.

[6] Alobid, A. & Hurairah, A. A. (2020). "The Beta Transmuted Lomax distribution with applications", STATISTICS IN TRANSITION , Vol. 21, No(2), pp. 13-34

[7] Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. & Nofal, Z. M. (2016). The Weibull Frechet distribution and its applications. Journal of Applied Statistics, 43(14), 26082626

[8] Aryal, G. R. & Tsokos, C. P.(2009). On the Transmuted Extreme Vatue Distributions with Application . Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Application, 71: 1401-1407.

[9] Afify, A. Z., Hamedani, G. G. Ghosh, I. & Mead, M. E. (2015). The transmuted Marshall-Olkin Frechet distribution: Properties and applications. International Journal of Statistics and Probability, 4:132–148.

[10] Afify, A. Z, Yousof, H. M. & Nadarajah, S. (2017),"The beta transmuted-H family for lifetime data", Statistics and Its Interface, Vol. 10, pp. 505-520.

[11] Barreto-Souze, W. M. Cordeiro, G.M. & Simas, A. B. (2011). Some Results for Beta Frechet Distribution. Communications in Statistics Theory and Methods ,40:798-811

[12] Banks, J. (1998). Handbook of Simulation. Canada, John Wiley & Sons.

[13] Bulsenko, N., Golenko, D., Shreider (1966), Yu. Sobol, I. and Sragovich, V.. The Monte Carlo Method: The Method of Statistical Trails. London, Pergamon.

[14] Bain, L. J. (1978). Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, New York: Marcel Dekker.

[15] Burnham, K. P. and Anderson, D. R. (2004). Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in model selection. Sociological Methods and Research, 33, 261-304.

[16] Burnham, K. P., Anderson (1998). Information theory and log-likelihood models: a basis for model selection and inference. Model selection and inference: a practical information-theoretic approach, 32-74.

[17] Cordeiro, G. M., et al.(2009). General Results for a Class of Beta-G Distributions. Unpublished material,.

[18] Cox, D. R. and Hinkley, D. V. (1974). Theoritical Statistics, London: Chapman and Hall.

[19] Casella, G. and Berger, R. L. (2002). Statistical Inference. Duxbury: Thomson Learning.

[20] Cordeiro, G. M., and Nadarajah, S. (2011). Closed form expressions of moments of a class of a beta generalized distributions, Brazilian Journal of Probability and Statistics. 25, 14-33.

[21] Doganaksoy, N. and Schmee, J. (1991). Comparisions of Approximate Confidence Intervals for the Smallest Extreme Value Distribution Simple Linear Regression Model Under Time Censoring. Communications in Statistics-Simulation and Computation. 20(4), 1085-1113.

[22] Doganaksoy, N. and Schmee, J. (1993). Comparisions of Approximate Confidence Intervals for Distributions Used in Life-Data Analysis. Technometrics, 35, No. 2, 175-184.

[23] Eugene, N., Lee, C., and Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. Communications in Statistics-Theory Methods 31 :497–512. MR1902307

[24] Elbatal, I., Asha, G., and Raja, A. V. (2014). Transmuted exponentiated Fréchet distribution: Properties and applications.

Journal of Statistics Applications & Probability, 3(3): 379.

[25] Frechet. M. (1924). Sur la Loi des Erreurs d'Observation.. Bulletin de la Societe Mathematique de Moscou,33, 5-8

[26] Fang, Y. (2011). Asymptotic equivalence between cross-validations and Akaike Information Criteria in mixed-effects models. Journal of Data Science, 9, 15-21.

[27] Famoye, F., Lee, C.,(2005) and Olumolade, O. The Beta-Weibull Distribution. J. Statistical Theory and Applications, 4 , 121–136.

[28] Fisher, R. (1924). Theory of Statistical Estimation. Proc. Camp. Phil. Soc. 22: 700-725.

[29] Gupta, A., and Nadarajah, S. (2004) On the moments of the beta normal distribution. Communication in Statistics Theory and Methods 31 , 1–13.

[30] Gradshteyn IS, Ryzhik IM (2000). Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, New York.

[31] Hogg, R. V., and Craig, A. T. (1995). Introduction to mathematical statistics. (5"" edition). New Jersey: Englewood Hills.

[32] Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression. Journal of the Royal Statistical Society, B, 41, 190-195.

[33] Hurvich, C. M. and Tsai, C. L. (1989). Regression and time series model selection in small samples. Biometrika, 76(2):297–307.

[34] Jennings, D. (1986). How Do We Judge Confidence Intervals Adequacy? The American Statistician. 41(4), 335-337.

[35] Jones, M. C. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics. Test 13:1-43.

[36] Kotz, S., and Nadarajah, S. (2000) Extreme Value Distributions:Theory and Applications. World Scientific.

[37] Knight, K. (2000). Mathematical Statistics. London, Chapman and Hall.

[38] Krishna, E. K., Jose, K., Alice, T. and Risti´c, M. M. (2013) The Marshall-Olkin Frechet distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 42(22), 4091-4107 .

[39] Ly, A., Marsman , M., Verhagen, J., Grasman, R. P., & Wagenmakers, E. J. (2017). A tutorial on fiher information. Journal of Mathematical Psychology, 80, 40-55. Retrieved from http: //dx.doi. org/10.1016/j.jmp.2017.05.006 doi:10.1016/j.jmp.2017.05.006.

[40] Lehmann, E. (1983). Theory of point estimation. New York: Wiley.

[41] Mann, N. Schafe, R. and Singpurwalla, N. (1974). Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data. New York: Wiley.

[42] M.R.Mahmomd and R.M Mandouh,(2013) ,on the Transmuted Frechet Distribution, Toumal of Applied Sciencos Research , 9(10):5553-5561

[43] Mead, M. E. A. (2014) A note on Kumaraswamy Frechet distribution. Australia, 8, 294-300

[44] Mead, M. E. , Afify, A. Z., Hamedani, G. G., & Ghosh, I. (2017). The Beta Exponential Frechet Distribution. with Applications. Austrian Journal of Statistical, Vol. 46, No. 1, pp. 41-63.

[45] Morgan, B. (1984). Elements of Simulation, London: Chapman and Hall.

[46] Mullins, E. and Stuart, M. (1992). Simulation as an Aid in Practical Statistical Problem-Solving. The Statisticcian. Vol. 41, pp. 17-26.

[47] Morgan, B. (1984). Elements of Simulation, London: Chapman and Hall.

[48] Mood, A. Graybill, F. and Boes, D. (1974). Introduction to the Theory of Statistics. McGraw-Hill.

[49] Nadarajah, S., Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution. Math. Probab. Eng. 10:323332.

[50] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005b). The beta exponential distribution. Reliability Engineering and System Safety 91:689-697.

[51] Nadarajah, S., Kotz, S. (2003a). The exponentiated Frechet Distribution. InterStat. Available online at http://interstat.statjournals.net/YEAR/2003/ abstracts/0312001.php

[52] Nadarajah, S., and Gupta, A. K., (2004).The Beta Frechet Distribution ,Far East Journal of Theoretical Statistics , 14:15-24

[53] Pal, M. and Tiensvwan, M. (2014). The Beta Transmuted Weibull Distribution. Austrian Journal of Statistics 43: 133 -149.

[54] Rubinstein, R. (1981). Simulation and the Monte Carlo Method. New York: Wiley.

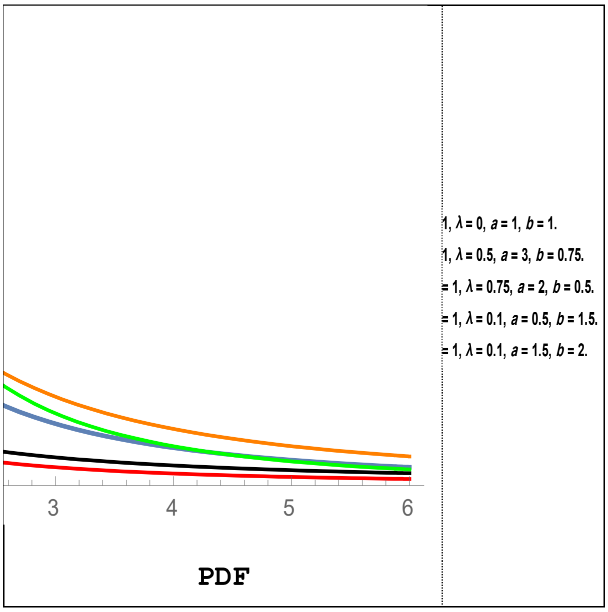
[55] Rao, C. R. (1973). Linear Statistical Inference and its Applications. New York: Wiley.

[56] da Silva, R. V., de Andrade, T. A., Maciel, D. B. Campos, R. P. and Cordeiro, G. M. A New Lifetime Model: The Gamma Extended Frechet Distribution. Journal of Statistical Theory and Applications, 12(1), 39-54 (2013).

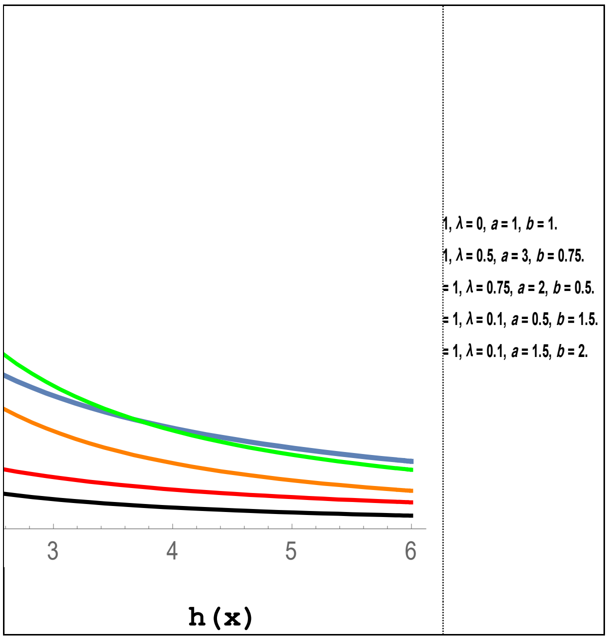
[57] Shaw, W. T. and Buckley, I. R. C. (2009). The Alchemy of Probability Distributions: Beyond Gram – Charlier Expansions, and a Skew-Kurtotic Normal Distribution From a Rank Transmutation Map. "Technical Report No. 0901.0434, Cornell University, Ithaca, NY.

[58] Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics, 6, 461-464.

[59] Sugiura, G. (1978). Further analysis of data by Akaike's information criterion and the finite corrections. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 7(1), pp. 13–26.
[60] Serfling, R. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York: Wiley.
[61] Sher B. Chhetri, Hongwei Long& Aryal, G. (2017), "The Beta Transmuted Pareto Distribution: Theory and Applications", Journal of Statistics Applications & Probability,Vol. 6(2), pp. 243-258.
[62] Watkins, Joseph.C.(2016). An Introduction to the Science of Statistics: From Theory to Implementation Preliminary Edition.
[63] Zacks, S. (1981b). The Theory of Statistical Inference. John Wiley
[64] Zacks, S. (1971a). The Theory of Statistical Inference. John Wiley & Sons.



شكل(1):دوال كثافة الاحتمال لتوزيع BTFR عند قيم مختلفة لمعالم التوزيع



شكل(2): دالة معدل الخطر لتوزيع BTFR عند قيم مختلفة لمعالم التوزيع